数学散歩　Ⅸ－13　　　　　　　　　　２０１８．８．α　　岐阜市　村山錞司

問題づくりの参考に　　：PART　５

「整数　板垣・土師　アレフ社」(大学受験参考書　昭和55年5月1日　３版発行 600円) その４

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜暑い最中、数の入った言葉のわけを考えることで、頭を冷やしては！！！＞

青二才、三時のおやつ、三々五々、二の足を踏む、三度笠、十六夜、二束三文、三面記事、村八分、第六感、二の句が継げない、万引き、八面六臂、三国一の花嫁、十八番、一目置く、三拍子そろう、二の舞、四六時中（二六時中）、八十八夜、宿六、二つ返事

・・・〔「答えられそうで答えられない **語源** 出口宗和　二見ﾚｲﾝﾎﾞｰ文庫」　から〕

Ａ　基礎編　Ⅳ　方程式の整数解

（前文から）・・・最近の研究によると、不定方程式の整数解を求める一般的な方法はないことが証明されている。したがって、個々の方程式の特殊性をとらえて処理する以外にない。・・・

とのことであるが、「一般的な方法はない」ことをどうやって示すのだろうか？気になるが。

（参考）「数学散歩 Ⅸ-11　2018.7.α　問 9 ～ 14 」

＜問題＞（いずれも解は後掲）

〔１〕　$6x + 10y = 90$ の整数解を求めよ。

〔追加の問題〕　$21x + 8y = 123$ の整数解を求めよ。

〔２〕　$4x + 6y + 17z = 5$ の整数解を求めよ。

〔３〕　$2xy + 8x - y = 16$ の整数解を求めよ。

〔４〕　次の方程式を満たす x、y の正の整数値を求めよ。

⑴　$2x^2 - xy + 3y^2 - 4x - 5y - 6 = 0$　　⑵　$2xy - 4x^2 + 12x - 5y = 11$

〔６〕　x、y、z はいずれも１より大きい自然数で、x と y は互いに素である。次の式を満たす x、y、z を求めよ。　$z = (6y + 5x)\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}\right)$

〔９〕　不等式 $ab + 1 \leqq abc \leqq bc + ca + ab + 1$　を満たす自然数 a、b、c のすべての組を求めよ。ただし、、$a>b>c$ とする。

＜解答、考察＞

〔１〕　$6x + 10y = 90$ の整数解を求めよ。

（解）6 で割って、$x + (5y)/3 = 15$ 。$y = 3k$、$x = 15 - 5k = -5(k - 3)$

$\therefore$　$(x,y) = (-5(k - 3), 3k)$ (k は整数)

〔追加の問題〕　$21x + 8y = 123$ の整数解を求めよ。

（解）　$y = \dfrac{123-21x}{8} = 15-3x + \dfrac{3(x+1)}{8}$、　$x = 8k-1$、$y = 18-21k$

$\therefore$　$(x,y) = (8k-1, -21k+18)$ (k は整数)

〔２〕　$4x + 6y + 17z = 5$ の整数解を求めよ。

（解）12 で割って、$\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} + z + \dfrac{5(z-1)}{12} = 0$　、

a、b、c を整数として　$x=3a$、$y= 2b$、$z=12c+1$ とおくと、

$a+b+17c+1=0$ より $a=-(b+17c+1)$　　$x=-3(b+17c+1)$、$y= 2b$、$z=12c+1$ (b、c は整数)

（別解）　$x = \dfrac{5-6y-17z}{4} = -\dfrac{3y}{2} - 4z - \dfrac{z-5}{4}$

a、b を整数として　$y=2a$、$z=4b+5$ とすると、$x=-3a-4(4b+5)-b=-3a-17b-20$

〔３〕　$2xy + 8x - y = 16$ の正の整数解を求めよ。

（解）$2x(y+4) - (y+4) = 12$、$(2x-1)(y+4) = 12$、

x、y $\geqq 1$ より、$2x-1 \geqq 1$ ($2x-1$ は奇数)、$y+4 \geqq 5$、$12 = 1\cdot 12 = 3\cdot 4$ …　$(x,y) = (1,8)$

〔４〕　次の方程式を満たす x、y の正の整数値を求めよ。

⑴　$2x^2 - xy + 3y^2 - 4x - 5y - 6 = 0$　　⑵　$2xy - 4x^2 + 12x - 5y = 11$

（解）⑴　$2x^2 - (y + 4)x + 3y^2 - 5y - 6 = 0$

x についての判別式 $D = (y+4)^2 - (3y^2 - 5y - 6) = -(23y^2 - 48y - 64) \geqq 0$

$\dfrac{24-\sqrt{2048}}{23} \leqq y \leqq \dfrac{24+\sqrt{2048}}{23}$　　より　$0.924\cdots \leqq y \leqq 3.011\cdots$

$\therefore$ $y = 1$、2、3　　$y = 1$、2 のとき x の正整数解なし、

$y = 3$ のとき $(2x-3)(x-2)=0$　　$x = 2$　　$(x,y) = (2,3)$

（参考）式を変形して、　$4y^2 = (y + 2x + 2)(y - x + 3)$ を利用する方法もある。

$p = y + 2x + 2$、$q = y - x + 3$ とおくと、　$p + 2q = 3y + 8$ 、$2pq = 4y^2$

p、2q を２根とする２次方程式は　$t^2 - (3y + 8)t + 8y^2 = 0$　・・・

判別式をとれば上の解と同様に・・・

⑵　$(2x - 5)y = 4x^2 - 12x + 1$　$y = \dfrac{4x^2 - 12x + 1}{2x - 5} = 2x - 1 + \dfrac{6}{2x - 5}$

$2x - 5$ は -3 以上の奇数で、6 の約数　-3、-1、1、3　$y>0$ より、

$(x, y) = (3, 11)$、$(4, 9)$

（別解）　x について整理し、　$4x^2 - 2(y + 6)x + 5y + 11 = 0$

判別式 $D' = (y + 6)^2 - 4(5y + 11 = (y - 4)^2 - 24 = z^2$　（z は正整数）

（$D' \geqq 0$ としても⑴と違って y の範囲が定まらない・・・）

$(y + z - 4)(y - z - 4) = 24$　$y + z - 4 > y - z - 4$

24 を２つの数の積に分けて求めればよい。・・・（以下略）

〔６〕　２以上の整数 x、y、z を求めよ。 $z = (6y + 5x)\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}\right)$

（解）　$z = (6y + 5x) \cdot \dfrac{x - y}{xy} = 6 - 5 + \dfrac{5x}{y} - \dfrac{6y}{x}$　y は 5 の約数で 2 以上　x は 6 の約数で 2 以上

$x > y$ より、$x = 6$、$y = 5$、$z = 2$

〔９〕　不等式 $ab + 1 \leqq abc \leqq bc + ca + ab + 1$ を満たす自然数 a、b、c のすべての組を求めよ。ただし、、$a>b>c$ とする。

（解）　$abc \geqq ab + 1$ を ab で割って、$c \geqq 1 + 1/ab$　∴　$c \geqq 2$

$abc \leqq bc + ca + ab + 1$ を abc で割って、　$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{abc} \geqq 1$

$c \geqq 3$ とすると、$a>b>c$ より、$b \geqq 4$、$a \geqq 5$、$abc \geqq 60$

$\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{60} = \dfrac{48}{60} < 1$　で不適。∴　$c = 2$

$c = 2$ をもとの不等式に代入し整理して、$ab - 2a - 2b + 4 = (a - 2)(b - 2) \leqq 5$

$b \geqq 4$、$a \geqq 5$ とすると、　$(a - 2)(b - 2) = 6$ で不適。

$b = 3$ のとき、$4 \leqq a \leqq 7$　まとめて、$a = 4、5、6、7$ 、$b = 3$、 $c = 2$

演習⑷　（問題　〔２３〕～〔２８〕から）

＜問題と解など＞

〔23〕 次の方程式を満たす x、y の正の整数値を求めよ。

⑴ （略） ⑵　$x + y + z = 100$、$27x + 8y + 5z = 800$　⑶　$x + y + z = 13$、$x>2y\geqq 3z$

（解） ⑵　x、y について解く。　$y + z = 100 - x$ … ①　、　$8y + 5z = 800 - 27x$ … ②

② − ①×5　$3y = 300 - 22x$　$y = 100 - 7x - x/3$

①×8 − ②　$3z = 19x$　$z = 6x + x/3$

$x = 3k$ とおいて、$y = 100 - 22k$、$z = 19k$

x、y、z > 0 より、$0 < k < 50/11 = 4.545\cdots$　k = 1、2、3、4

$(x, y, z) = (3, 78, 19)$、$(6, 56, 38)$、$(9, 34, 57)$、$(12, 12, 76)$

⑶　6 倍して　$6x + 6y + 6z = 78$ 、$x>2y\geqq 3z$ より　$33z<78$、$0<z<3$ で　z = 1、2

$z = 1$ のとき $x + y = 12$、$x = 12 - y>2y\geqq 3$ 、∴　$1.5<y<4$　y = 2、3

$(x, y, z) = (10, 2, 1)$ 、$(9, 3, 1)$

$z = 2$ のとき $x + y = 11$、$x = 11 - y>2y\geqq 6$ 、∴　$3\leqq y<3.66\cdots$　$y = 3$

$(x, y, z) = (8, 3, 2)$

〔26〕 分母子ともに正の整数の分数があり、分母に１を加えるとその値は 2/3 に等しく、分子に 2 を加えるとその値は 1 と 2 の間にある。この分数を求めよ。

（答のみ）　分数は、4/5

〔27〕 次の連立方程式の解が正の整数値となるような a の整数値と、そのときの x、y の値を求めよ。　$2x + ay - 6 = 0$ ・・・①　$3x + 2y + 12a = 0$ ・・・②

（解） x、y について解く。

$x = -\dfrac{12(a^2+1)}{3a-4}$ …③ 、 $y = \dfrac{24a+18}{3a-4} = 8 + \dfrac{50}{3a-4}$ …④

x、$y>0$ だから③より $a < 4/3$、④より $a < -3/4$ …⑤

よって 3a-4 は 50 の約数で負

3a-4	-1	-2	-5	-10	-25	-50
a	分数×	分数×	分数×	-2	-7	分数×

$a = -2$ のとき、$(x, y) = (6, 3)$

$a = -7$ のとき、$(x, y) = (24, 6)$