数学散歩　Ⅸ－14　　　　　　　　　２０１８．８．β　　岐阜市　村山錞司

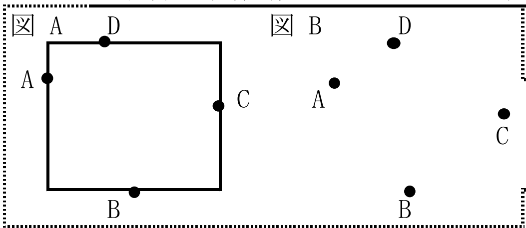
問題づくりの参考に　　：PART　５

「整数　板垣・土師　アレフ社」(大学受験参考書　昭和55年5月1日　３版発行 600円）その５

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜フト、手にした 2 冊の本との出会い＞　何かの参考になれば。

「世界の名作 数理パズル１００ 中村義作　BLUE BACKS」



100 問中のﾄｯﾌﾟﾊﾞｯﾀｰの 001 番の問題です。一晩、考えましたが、いいｱｲﾃﾞｱが浮かびませんでした。

（問）＜4 点から正方形の復元＞

正方形の各辺上の 4 点 A、B、C、D （図 A）から、4 辺を消した 4 点（図 (B) から正方形を復元せよ。

（答は後日、紹介するつもりですが。）

「『英語』は日本人には聞こえない 谷 道央（1938 生れ）幻冬社 ﾙﾈｯｻﾝｽ新書（内容 143P)」

（大きな活字で老眼でも楽勝。英語が苦手な私には、大いに参考になりました。）

- われわれ日本人が備えなければならない真にさし迫った課題は、英語そのものではなく、英語の「心の習慣」である「ロジック」を学び直すことです。
- 日本人にとって、真の意味での英語習得は、まさに苦行なのです。　（本文から）

B　応用編（88p ～ 145p [1] ～[50] の 50 問から選択し紹介）①

＜問題、解など＞

[5]　x を自然数とするとき、次の数は完全平方数となり得るか。

⑴　x^2+3x+2　　⑵　$x^2+5x+13$

（追加）　x を整数としたらどうなるか。

（解）⑴　$(x+1)^2 < x^2+3x+2=(x+1)(x+2) < (x+2)^2$

完全平方数にはなり得ない。

⑵　$(x+2)^2 = x^2+4x+4$　、　$(x+4)^2 = x^2+8x+16$　　$x>0$ だから

$(x+2)^2 < x^2+5x+13 < (x+4)^2$　　$x^2+5x+13 = (x+3)^2-(x-4)$

だから　$x=4$ のとき　$4^2+5\cdot 4+13 = 49 = 7^2$　完全平方数になる。

⑵の（別解）　$x^2+5x+13 = h^2$ $(h>0)$ とおく。　判別式 $D=4h^2-27=k^2$ とおくと

$(2h+k)(2h-k)=27=27\cdot 1$、$9\cdot 3$ 、$2h+k>2h-k$ より、$(2h+k,2h-k)=(27,1)$、$(9,3)$

2h + k	27	9
2h － k	1	3
h	7	3
k	13	3

$h=7$ のとき　$x^2+5x-36=(x-4)(x+9)=0$

$x>0$ だから $x=4$　　$4^2+5\cdot 4+13 = 49 = 7^2$

$h=3$ のとき　$x^2+5x+4=(x+1)(x+4)=0$

$x>0$ だから 解なし。

（追加）　⑴　$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ より $x=-1$、-2 のとき $0=0^2$

⑵（別解）より　$h=7$ で $x=4$、-9 のとき $49=7^2$

$h=3$ で $x=-1$、-4 のとき $9=3^2$

（参考）⑴　$(x+1)(x+2)=(x+1)^2+(x+1)=(x+2)^2-(x+2)$　　($x=-1$、-2 で 0)

⑵　$x^2+5x+13$

$=(x+1)^2+3(x+4)$　$=(x+2)^2+(x+9)$　$=(x+3)^2-(x-4)$　$=(x+4)^2-3(x+1)$

($x=-4$ で 9)　　($x=-9$ で 49)　　($x=4$ で 49)　　($x=-1$ で 9)

[6]　n が 1 より大きい整数であるとき、$p=2^{3n}-7n-1$ は 49 の倍数であることを証明せよ。

（解）　$p=8^n-1-7n=(8-1)\{(8^{n-1}+8^{n-2}+\cdots+1)-n\} = (8-1)\{(8^{n-1}-1)+(8^{n-2}-1)+\cdots+(8-1)+(1-1)\}$

$=7(7q_{n-1}+7q_{n-2}+\cdots+7q_1+7q_0)$　$=49(q_{n-1}+q_{n-2}+\cdots+q_1+q_0)$

（数学的帰納法の利用もある。）

[9]　原点から座標が (p,q) である点までの距離を r とする。p、q、r が自然数で p が素数のとき、q、r を p で表わせ。また、$p<10$ のとき、上の条件を満たす点 (p,q) をすべて求めよ。

（解）　$p^2+q^2=r^2$　より、$p^2=(r+q)(r-q)$　　$r+q>r-q$ でp 素数だから、

$r+q=p^2$ 、$r-q=1$　より、$r=(p^2+1)/2$ 、$q=(p^2-1)/2$　　$p<10$（p：素数）より、p=3、5、7

∴　$(p,q)=(3,4)$、$(5,12)$、$(7,24)$

[10]　次の等式を満たす整数の組 (x,y,z) をすべて求めよ。ただし、これらの組 (x,y,z) において、$|y|\geqq 2$、$|z|\geqq 2$ であることは分かっているものとする。

$$1-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{y-\cfrac{1}{z}}}=\frac{2}{7}$$

（解の前段）　$\dfrac{2}{7}=1-\dfrac{5}{7}=1-\cfrac{1}{\cfrac{7}{5}}$　　∴　$x-\cfrac{1}{y-\cfrac{1}{z}}=\dfrac{7}{5}$ ・・・①

（解１）繁分数の式変形

$\dfrac{7}{5} = \underline{\underline{1}} + \dfrac{2}{5} = 1 - \dfrac{1}{\dfrac{-5}{2}} = 1 - \dfrac{1}{-2 - \dfrac{1}{2}}$、 $= 1 - \dfrac{1}{-3 - \dfrac{1}{-2}}$

$(x, y, z) = (1, -2, 2)$ 、$(1, -3, -2)$

$\dfrac{7}{5} = \underline{\underline{2}} - \dfrac{3}{5} = 2 - \dfrac{1}{\dfrac{5}{3}} = 2 - \dfrac{1}{2 - \dfrac{1}{3}}$、 $= 2 - \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{3/2}}$ 不可

$(x, y, z) = (2, 2, 3)$

（解２）不等式の利用

$|y| \geqq 2$、$|z| \geqq 2$ より、 $y \leqq -2$、$2 \leqq y$、 $-\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{1}{z} \leqq \dfrac{1}{2}$ ・・・②

$\therefore\ y - \dfrac{1}{z} \leqq -\dfrac{3}{2}$、 $y - \dfrac{1}{z} \geqq \dfrac{3}{2}$　　$-\dfrac{2}{3} \leqq \dfrac{1}{y - \dfrac{1}{z}} \leqq \dfrac{2}{3}$

$x - \dfrac{2}{3} \leqq x - \dfrac{1}{y - \dfrac{1}{z}} \quad \left(= \dfrac{7}{5}\right) \leqq x + \dfrac{2}{3}$

$\therefore\ -\dfrac{11}{15} \leqq x \leqq \dfrac{31}{15} \qquad \therefore\ x = 1$、$2$

$x = 1$ のとき①より、 $y - \dfrac{1}{z} = -\dfrac{5}{2}$、$\dfrac{1}{z} = y + \dfrac{5}{2}$ ・・・③

②より、 $-3 \leqq y \leqq -2$ ∴ $y = -2$、-3 　③より、$y = -2$、$z = 2$ と $y = -3$、$z = -2$

$x = 2$ のとき①より、 $y - \dfrac{1}{z} = \dfrac{5}{3}$、$\dfrac{1}{z} = y - \dfrac{5}{3}$ ・・・③

②より、 $-\dfrac{1}{2} \leqq y - \dfrac{5}{3} \leqq \dfrac{1}{2}$ 　 $\therefore \dfrac{7}{6} \leqq y \leqq \dfrac{13}{6}$ 　 ∴ $y = 2$、$z = 3$

以上から $(x, y, z) = (1, -2, 2)$ 、$(1, -3, -2)$ 、$(2, 2, 3)$

[12] ⑴ ２次方程式 $x^2 - 17x + 7p = 0$ の 2 根が正整数となるような整数 p の値を求めよ。
⑵ ３次方程式 $x^3 - 9x^2 + 6x + a = 0$ が 3 つの整数解をもつような a の整数値をすべて求めよ。

（解）⑴ ２根を α、β（ともに正整数）、$p = mn$ （m、n ともに正整数）とすると、

$\begin{cases} \alpha + \beta = 17 \\ \alpha\beta = 7p \end{cases}$ 　$\alpha = 7m$、$\beta = n$ とでき、$7m + n = 17$、$n = 17 - 7m > 0$

$0 < m < 17/7 = 2.42\cdots$ 　 $m = 1$、2 だから

m	n	p	α	β
1	10	10	7	10
2	3	6	14	3

∴ $p = 6$、10

⑵ $f(x) = x^3 - 9x^2 + 6x + a$ とおいて、$y = f(x)$ のグラフと x 軸とが３つの点で交わる。
$y = f(x)$ の極大値が正、極小値が負。
$f'(x) = 3(x^2 - 6x + 2) = 0$ より $x = 3 \pm \sqrt{7}$
(極大値が正、極小値が負として a の範囲を求めると広くて大変（確認されたい！！！）
極大点と極小点の間に x 軸との交点が１つある。
$x = \alpha$ とすると、$3-\sqrt{7}(=0.35\cdots) < \alpha < 3+\sqrt{7}(=5.64\cdots)$ 　 ∴ $\alpha = 1$、2、3、4、5

$\alpha = 1$ のとき　$1-9+6+a=0$　$a=2$　　$x^3-9x^2+6x+2 = (x-1)(x^2-8x-2)=0$　不可
$\alpha = 2$ のとき　$8-36+12+a=0$　$a=16$　　$x^3-9x^2+6x+16 = (x-2)(x+1)(x-8)=0$　$x=-1$、2、8
$\alpha = 3$ のとき　$27-81+18+a=0$　$a=36$　　$x^3-9x^2+6x+36 = (x-3)(x^2-8x-12)=0$　不可
$\alpha = 4$ のとき　$64-144+24+a=0$　$a=56$　　$x^3-9x^2+6x+56 = (x-4)(x+2)(x-7)=0$　$x=-2$、4、7
$\alpha = 5$ のとき　$125-225+30+a=0$　$a=70$　　$x^3-9x^2+6x+70 = (x-5)(x^2-4x-14)=0$　不可

以上より、$a = 16$、56

[13] 7 桁の数 ２６ □□ ６０７ が ９９ の倍数になるためには、□ にどんな数を入れればよいか。

＜準備として＞（ｲ） 9 の倍数 ： 各位の数の和が 9 の倍数
（ﾛ） 11 の倍数 ： （奇数番目の数の和）－（偶数番目の数の和）が 11 の倍数
◎ 7 桁の数 a b c d e f g について上記の事項を示せ。

（参考） $10^n + 10^{n-1} + \cdots + 10 + 1 = A_n$ 、 $10^n - 10^{n-1} + 10^{n-2} \cdots + (-1)^n = B_n$ 　とおくと、

$10^n - 1 = (10 - 1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1 = 9A_{n-1}$

$10^{2n} - 1 = (10^2 - 1)(10^{2n-2} + 10^{2n-4} + \cdots + 10^2 + 1)$

$(10^2 - 1 = (10 + 1)(10 - 1) = 11 \cdot 9 = 99)$

$= 9 \cdot (10^{2n-1} + 10^{2n-2} + \cdots + 10 + 1) = 9 \cdot A_{2n-1}$

$= 11 \cdot (10^{2n-1} - 10^{2n-2} + \cdots + 10 - 1) = 11 \cdot B_{2n-1}$

$10^{2n+1} + 1 = 11 \cdot (10^{2n} - 10^{2n+1} + \cdots + 10^2 - 10 + 1) = 11 \cdot B_{2n}$

（◎について）（ｲ） $P = (a-+\{(10^6 - 1)a + (10^5 - 1)b + \cdots + (10 - 1)f\}$
{ } の中は 9 の倍数だから、P が 9 の倍数になるための条件は、
各位の数の和 $(a+b+c+d+e+f+g)$ が 9 の倍数になること

（ﾛ） $P = (a-b+c-d+e-f+g) + \{(10^6 - 1)a + (10^5 + 1)b + \cdots + (10^2 - 1)e + (10 + 1)f\}$
{ } の中は 11 の倍数だから、P が 11 の倍数になるための条件は、
（奇数番目の数の和）－（偶数番目の数の和） $(a-b+c-d+e-f+g)$ が 11 の倍数になること

（解） ２６ｘｙ６０７ として、 $2+6+x+y+6+0+7 = x+y+21 = 9m$ 、$2-6+x-y+6-0+7 = x-y+9 = 11n$

$\begin{cases} x+y = 9m-21 \text{ 、} 0 \leqq x+y \leqq 18 \text{ より、} m = 3, 4 \ \therefore\ x+y = 6, 15 \\ x-y = 11n-9 \text{ 、} -9 \leqq x-y \leqq 9 \text{ より、} n = 0, 1 \ \therefore\ x-y = -9, 2 \end{cases}$ ・・・ $(x, y) = (4, 2)$

よって ④ ②