数学散歩　Ⅸ－15　　　　　　　　　２０１８．９．α　　岐阜市　村山錞司

問題づくりの参考に　　：PART　５

「整数　板垣・土師　アレフ社」(大学受験参考書　昭和55年5月1日 ３版発行 600円) その６

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

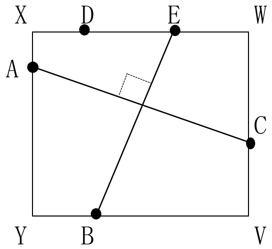
「世界の名作 数理パズル１００ 中村義作　BLUE BACKS」「Ⅸ-14　2018.8.β」

(前回の問と答)

(問) ＜4 点から正方形の復元＞

4 点 A、B、C、D から正方形を復元せよ。

(解) 点 B から線分 AC に垂直な直線を引き、AC = BE となる点 E をとる。D、E は正方形の同一辺上。DE∥Y(B)V、XW⊥X(A)Y∥W(C)V 図のように正方形XYVW とすればよい。



B　応用編 (88p ～ 145p [1] ～[50] の 50 問から選択し紹介)　②

＜問題、解など＞

[14]　10 進小数 0.5625 を r 進法で展開すると小数第 2 位で終わる。この小数を表わす各位の数を加えると 3 になるという。 r を求めよ。

(解)　$0.5625 = \dfrac{5625}{10000} = \dfrac{3^2\cdot 5^4}{10^4} = \dfrac{3^2}{2^4} = \dfrac{9}{16} = \dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{4^2} = 0.21_{(4)}$

よって　r = 4　　(これでよいと思われるが、本では別のやり方で・・・)

(私の別解)　$\dfrac{a}{r} + \dfrac{b}{r^2} = \dfrac{9}{16}$、$a + b = 3$　　$ar + b = \dfrac{9r^2}{16}$　より、r は 4 の倍数

$a + \dfrac{b}{r} = \dfrac{9r}{16}$ より、$r = \left(a + \dfrac{b}{r}\right)\cdot\dfrac{16}{9} < (a+b)\cdot\dfrac{16}{9} = \dfrac{16}{3} < 6$　$\therefore\ r = 4$

[20]　異なる２つの正整数がある。ともに２桁で１位の数字が等しい。両方を 9 で割ると、互いに一方の商は他方の余りに等しい。２数を求めよ。

(略解) ２数を 10a + c、10b + c ($1\leqq a<b\leqq 9$ とする。

			商	余り	
10a + c =	9a + (a+c)	(a+c＜9 のとき)	a	a+c	・・・(1)
	9(a+1) + (a+c−9)	(a+c≧9 のとき)	a+1	a+c−9	・・・(2)
10b + c =	9b + (b+c)	(b+c＜9 のとき)	b	b+c	・・・(3)
	9(b+1) + (b+c−9)	(b+c≧9 のとき)	b+1	b+c−9	・・・(4)

(1)、(4)のときのみ成立 (他は不可)

a = b+c−9、a+c = b+1　より、a−b = c−9 = 1−c ∴　c = 5 、b = a+4

a+c = a+5＜9 だから a = 1、2、3　　　　(答) 15 と 55、25 と 65、35 と 75

(参考　それぞれ 10 進数の２数を 9 進数にすると 16 と 61、27 と 72、38 と 83)

[21]　(1)　$n^4 + 2n^3 + 11n^2 + 10n$ は 24 の倍数であることを示せ。

(2)　$\dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^4}{2} + \dfrac{n^3}{3} - \dfrac{n}{30}$　は整数であることを示せ。

(参考　24 = 2・3・4 、30 = 2・3・5 を利用して、式変形をいろいろ工夫してください。)

(準備)　連続 p 正整数の積は　p！の倍数　${}_nC_p = n(n-1)\cdots(n-r+1)/p!$ は正整数より

(略解) (1)　与式　$= n(n+1)(n^2+n+10)$

$= n(n+1)\{(n+2)(n+3)-4(n-1)\}$ ↗ $= n(n+1)(n+2)(n+3)-4(n-1)n(n+1)$

$= 24K-4\cdot 6L = 24(K-L)$

(2) 通分して　$(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n)/30$ 、 $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) = n^5-5n^3+4n = 30K$

分子 − 30K = $5(n^5 + 3n^4 + 3n^3 - n) = 5n(n^4 - 1) + 15n^3(n + 1) = 30L + 30H$

∴　　分子 = 30(K + L + H)　　(感想　(1)の問題の式はどこから？)

(参考　(2)は　$Q = 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4$ であるとの記述あり。解の概略を以下に示す。)

$(n+1)^5 - n^5 = 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1$

$n^5 - (n-1)^5 = \cdots$

$\cdots$

$3^5 - 2^5 = 5\cdot 2^4+10\cdot 2^3+10\cdot 2^2+5\cdot 2+ 1$

$)\ 2^5 - 1^5 = 5\cdot 1^4+10\cdot 1^3+10\cdot 1^2+5\cdot 1+ 1$

$(n+1)^5 - 1 = 5(1^4+2^4+\cdots+n^4) + 10(1^3+2^3+\cdots+n^3 + 10(1^2+2^2+\cdots+n^2)$
$+ 5(1+2+\cdots+n) + n$

$n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n = 5Q + 10\cdot\{n(n+1)/2\}^2 + 10\cdot\{n(n+1)(2n+1)/6\}$
$+ 5\cdot n(n+1)/2 + n$

計算すれば、 $Q = n^5/5 + n^4/2 + n^3/3 - n/30$ を得る。

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+p-1) = \{n(n+1)\cdots(n+p)\}/(p+1)$ （ p≧1、2、・・・ の利用は？）

[26] x を整数とするとき、次の⑴、⑵が素数となるような x を求めよ。
⑴ $x^4 + 4$ ⑵ $x^4 - 6x^2 + 25$

（解）⑴ $x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) = \{(x+1)^2 + 1\}\{(x-1)^2 + 1\}$
より $x = \pm 1$ で $x^4 + 4 = 5$

⑵ $x^4 - 6x^2 + 25 = (x^2 + 4x + 5)(x^2 - 4x + 5) = \{(x+2)^2 + 1\}\{(x-2)^2 + 1\}$
より $x = \pm 2$ で $x^4 - 6x^2 + 25 = 17$

[27] 3 と 5 、41 と 43 のように、p と p+2 がともに素数であるとき、この一対の素数を双子素数という。3 と 5 の場合を除き、双子素数に挟まれた自然数は 6 の倍数であることを示せ。

（解） すべての自然数は、m を負でない整数として、6m−2、6m−1、6m、6m+1、6m+2、6m+3 (m≧0 の場合 6m+1、6m+2、6m+3、m≧1 の場合 6m−2、6m−1、6m) のいずれかで表される。
6m−2 = 2(3m−1)、6m、6m+2 = 2(3m+1)、6m+3 = 3(2m+1) は合成数で、素数になり得るのは、6m−1 と 6m+1 の２数で、挟まれるのは 6m のみ。

（参考） 「２つの未解決問題」本問題に絡んで、次の２つの問題を紹介する。詳細については、インターネットなどで調べてください。

❶ 「双子素数」は無数にある。
❷ 「ゴールドバッハ(Goldbach)の問題」
２より大きい偶数は２つの素数の和として表される。
（「数学散歩 Ⅸ-12 2018.7. β 演習⑶-[15]参照）

（参考） ❷：数学小辞典（矢野健太郎）：$6 \leqq n < 10^5$ のすべての偶数 n については真であることが確かめられている。・・・とある。(別資料)では 4×10^{18} まで証明 (2018)
数学辞典（日本数学会編）： （追加あり） 9 以上の奇数は 3 個の素数の和として表される。

[28] （問題-改）＜完全数＞
6 の約数は 1、2、3、6 でその和は 6 の 2 倍になっている (1+2+3+6 = 2×6 、最大数 6 は、それより小さい数の和）。正の約数の和がその自然数の２倍になっているとき、完全数という。
p、q、r、s、t、u を素数とするとき、次を示せ。
⑴ pq という形の完全数は 6 だけである。 ⑵ r^2s という形の完全数は 28 だけである。
⑶ t^2u^2 という形の完全数はない。
（追加） ⑷ 496、8128 はともに完全数である。
⑸ $2^{n+1} - 1$ が素数ならば、$2^n(2^{n+1} - 1)$ は完全数である。

（参考 本より）奇数の完全数があるかどうかは、まだ分かっていない。

（解）⑴ $1+p+q+pq = 2pq$ より $(p-1)(q-1) = 2$ $0<p<q$ として
$p-1 = 1$、$q-1 = 2$ だから $p = 2$、$q = 3$ で $pq = 6$

⑵ $1+r+r^2+s+rs+r^2s = (1+r+r^2)(1+s) = 2r^2s$ より

$s = \dfrac{r^2 + r + 1}{r^2 - r - 1}$

r	2	3	5
s	7	13/5 ×	31/19 ×

r＞4 のとき $s = 2 - \dfrac{r^2-3r-3}{r^2-r-1} = 2 - \dfrac{r(r-3)-3}{r(r-1)-1} < 2$ で不可

以上より、完全数は r = 2、s = 7 の 28 のときだけ

⑶ $(1+t+t^2)(1+u+u^2) = 2t^2u^2$ $t+t^2 = t(1+t)$ 、$u+u^2 = u(1+u)$ でともに偶数だから、左辺は奇数の積で奇数。右辺は偶数 よって、完全数はない。

⑷ $496 = 2^4\times31$ 、$(1+2+4+8+16)(1+31) = 2\times496$
$8128 = 2^6\times127$ 、$(1+2+4+8+16+32+64)(1+127) = 2\times8128$

⑸ 2 と $2^{n+1}-1$ が素数だから、$2^n(2^{n+1}-1)$ の正の約数 2^k と $2^k(2^{n+1}-1)$ (k=0, 1、…、n) の和は $(1+2+\cdots+2^n)\{1+(2^{n+1}-1)\} = (2^{n+1}-1)\cdot2^{n+1} = 2\cdot2^n(2^{n+1}-1)$
よって $2^n(2^{n+1} - 1)$ は完全数

（参考）

n	1	2	4	6
完全数	6	28	496	8128

[32] ⑴ 100！= $(2m - 1)\times2^n$ (m、n は正の整数) とすると n の値はいくつになるか。
⑵ 100！ を計算したとき、その末尾に 0 がいくつくっつくか。
⑶ 同様に、1234！ の値を計算したとき、その末尾に 0 がいくつくっつくか。

（解）⑴ 1～100 の 2 の倍数は 50 個、そのうち 4 の倍数は 25個、8 の倍数は 12 個、
(例) 16 の倍数は 16、32、…、16×6=96 の 6 個、 32 の倍数は 3 個、64 の 1 個
だから n = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97

⑵ 同様にして計算したときの 5^n の n を求めればよいから、n = 20 + 4 = 24 個

⑶ 5, 10、…、1230=5×246 246個、25、50、…、1225=25×49 49個、
125、250、…、1125=125×9 9個、625 1個 よって 246 + 49 + 9 + 1 = 305個