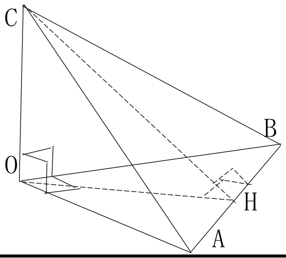
数学散歩　Ⅸ－16　　　　　　　　　　２０１８．９．β　　岐阜市　村山錞司

問題づくりの参考に　　：PART　５

「整数　板垣・土師　アレフ社」（大学受験参考書　昭和55年5月1日　３版発行 600円）その７

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜四平方の定理　？＞　本屋さんで立ち読みしていて目にとまりました。　（三平方の定理は　？）



OA⊥OB、OC⊥平面OAB のとき、

$(\triangle ABC)^2 = (\triangle OAB)^2 + (\triangle OBC)^2 + (\triangle OAC)^2$

（参考）OA=a、OB=b、OC=c のとき、

△OAB の面積から、　$OH=ab/\sqrt{a^2+b^2}$ で、　CH = ・・・

左辺、右辺ともに、$(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)/4$ となる。

（少しは楽しめるかもしれません。）

B　応用編（88p ～ 145p［1］～［50］の 50 問から選択し紹介）　③

＜問題、解など＞

[34]　自然数 n に対して、$n<x<n+1$ の範囲にあって、$2^{x-1}-(1/2)$ の値を整数にするような x の値の個数を a_n とするとき、次の各問に答えよ。

⑴　a_n を n の式で表わせ。⑵　$S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{a_k}$ を求めよ。　⑶　$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

（感想：最初は何を求めたらよいのか・・・分からなかったが。）

（答のみ）　⑴　$a_n = 2^{n-1}$　⑵　$S_n = 4(1-1/2^n) - n/2^{n-1}$　⑶　$\lim_{n\to\infty} S_n = 4$

[36]　直線 $y = x$ と $y = 2^{-100}\cdot x^2$ によって囲まれた図形を F とする。座標が $(2^m, 2^n)$（m、n は正の整数）であるような点は F の内部に何個あるか。

（感想：頭がおかしくなりそう　？？？　でした。）

（略解）　直線と放物線の交点は原点O(0,0)と$(2^{100}, 2^{100})$で放物線は下に凸。$x = 2^k$ (k=1,2、…、99) とすると、$y = 2^{2k-100}$ だから F の内部の点を$(2^k, 2^\ell)$ とすると、

(ｲ)　$0<k\leqq 50$ のとき

$2^{2k-100} \leqq 1 < 2^1 \leqq 2^\ell < 2^k$　$1\leqq \ell < k$ より k-1 個だから $\sum_{k=1}^{50}(k-1) = 1+2+\cdots+49 = 1225$

(ﾛ)　$50<k<100$ のとき

$2^{2k-100} < 2^\ell < 2^k$ 、$2k-99 \leqq \ell \leqq k-1$ より 99-k 個だから $\sum_{k=51}^{99}(99-k) = 48+47+\cdots+1 = 1176$

以上より、　1225 + 1176 = 2401

[40]　1 からはじめて、すべての自然数を横に１列に並べるとき、34788 番目にくる数はいくつか。

（例）　1、2、…、10、11、1<u>2</u>、…　15 番目は 2

（感想：簡単にできそうですが、間違えそうで・・・）

（解）　1 桁の数　1、2、・・・、 9　　最後の 9 は、最初の 1 から　　　　　　　　9 番目

2 桁の数　10、・・・ 、 99　　最後の 9 は、1 から　　$9+90\times2=189$　　189 番目

3 桁の数　100、・・・、999　　最後の 9 は、1 から　$189+900\times3=2889$　　2889 番目

4 桁の数　1000、・・、9999　　最後の 9 は、1 から $2889+9000\times4=38889$　38889 番目

34788 番目は 4 桁の数で、34788 − 2889 = 31899 だから、1000（ 1 番目として）から数えて 31899 番目の数になる。31899 ÷ 4 = 7974 ・・・余り 3 だから 1000（ 1 番目として）から 7974 番目の数 8973 の次の 89<u>7</u>4 の 3 番目の数 7 が答になる。

[43]　任意の自然数 m、n （ただし、$m\geqq 2$ ）について、n^m は連続する n 個の奇数の和で表される。その最小項を m と n で表わせ。

（感想：この問題の第一印象は？　何か妙な感じがするが、やってみると・・・）

（解）　最小項を 2N+1 とすると、連続する n 個の奇数は、

2N+1、2N+3、・・・、(2(N+n−1)+1 =) 2N+2n−1 で、その和は　$n(2N+1+2N+2n-1)/2 = n(2N+n)$

∴　$n^m = n(2N+n)$ だから　$2N+n = n^{m-1}$　よって　最小項(2N+1) は $n^{m-1}-n+1$

（ m に適当に数を入れて確認してください・・・m=2 とすると 初項は 1 で和は n^2 ）

[44]　⑴　n が奇数ならば、a_1、a_2、…、a_n を 1、2、…、n のどんな順列としても、
$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$ は常に 2 で割り切れることを示せ。
⑵　a_1、a_2、…、a_n が整数ならば、 $|a_1-a_2| + |a_2-a_3| + \cdots + |a_n-a_1|$ は偶数であること示せ。

（解）⑴ a_1-1、a_2-2、…、a_n-n がすべて奇数であるとすると、その和(奇数個)は奇数になる。
$(a_1-1)+(a_2-2)+\cdots+(a_n-n) = (a_1+a_2+\cdots+a_n) - (1+2+\cdots+n) = 0$ （偶数）　矛盾する。
a_1-1,、a_2-2、…、a_n-n のうちどれか１つは偶数で、積は 2 の倍数。

⑵ $\{ |a_1-a_2| + |a_2-a_3| + \cdots + |a_n-a_1| \}^2 = |a_1-a_2|^2 + |a_2-a_3|^2 + \cdots + |a_n-a_1|^2 + 2\{\ \}$
$= 2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) - 2(a_1a_2 + \cdots + a_na_1) + 2\{\ \}$　$\{\ \}^2$ が偶数だから
$|a_1-a_2| + |a_2-a_3| + \cdots + |a_n-a_1|$ は偶数。

（⑵の別解）　絶対値 ｜｜ を中の正負で開くと、 各 a_1、a_2、…、a_n の係数は、2 、0、-2 の 3 通りの偶数のいずれかで、その和も偶数になる。

[45]改（本では、長文で穴埋めの問題であり、題意にそって改題）
4 桁の整数（例として 3025）を中央で 2 桁ずつ（30 と 25）に分け、その和（ 30+25 = 55 ）の２乗（ $55^2 = 3025$ ）が元の数（ 3025 ）になるような 4 桁の整数があれば求めよ。

(解)(本を参考に) 4 桁の整数を 2 桁ずつ A、B（ B は 10 の位が 0 でも可）に分けたとする。
$100A+B = (A+B)^2$　　∴ $(A+B)^2-(A+B) = (A+B)(A+B-1) = 99A = 9\times11\times A$ ・・・※
＜9×11×A を分割＞　 A = xy として A+B、A+B-1 の 2 つの積に分割する。
この 2 つは連続 2 整数で、9 を 3×3 に分けられないから、次の 3 通りの分割になる。
①　(9x , 11y)　　② (11x , 9y)　　③　 (99 , xy (=A)) (99 は 2 桁の最大数)

① (9x , 11y)　 9x-11y = (A+B)-(A+B-1) = 1　 より、x = 5、y = 4
(45 , 44) だから 45×44 = 99×20　 A = 20、B = 25
よって求める 4 桁の整数は 2025 (= $(20+25)^2$)

② (11x , 9y)　 11x-9y = (A+B)-(A+B-1) = 1　 より、x = 5、y = 6
(55 , 54) だから 55×54 = 99×30　 A = 30、B = 25
よって求める 4 桁の整数は 3025 (= $(30+25)^2$)　　以上から、2025、3025、9801

③ (99 , 98)　 99×98、A = 98、B = 1 = 01　 よって、9801 (= $(98+1)^2$)

（感想：本では・・・ ※をにらみながら手さぐりで A+B は 45、55、99 の 3 つであることが・・・となっている。「手さぐり」の数学的意味は何だろうか？）

[48]　ある整数の平方となる整数で、末位の 2 数字を削除したとき再びある整数の平方となるような整数のうちで最大のものを求めよ。ただし、削除する数字のうち少なくとも１つは 0 でないものとする。

（解） （本の解を参考に）　問題文の初めの平方数を n^2、　末位の 2 数字を削除して得られる平方数を m^2 とすると、　$0 < n^2 - 100m^2 < 100$　　・・・①
$n^2 - 100m^2 > 0$　　より　$n \geqq 10m + 1$　　・・・②
$n^2 - 100m^2 < 100$　より　$n < 10\sqrt{m^2+1}$　　・・・③

②、③より、 $10m + 1 < 10\sqrt{m^2+1}$　2 乗して $20m < 99$　 ∴ $m < 4.95$ より　$m \leqq 4$
m = 4 のとき、②、③より　$41 \leqq n < 41.23\cdots$　n = 41 とすると $41^2 = 1681$
$m \leqq 3$ のとき　$31 \leqq n < 31.62\cdots$　41 より小で不可

（別解） （本による上記の解法が何か気にかかり、別解を考えてみた。）
$\boxed{n^2 = 100m^2 + a}$
m、n、a は正整数で、m≧1、n＞10m、1≦a＜100 （削除した末位）　・・・①
$1 \leqq a = n^2 - 100m^2 = (n+10m)(n-10m) < 100$
$n-10m \geqq 1$、$n \geqq 10m+1$ より　$n+10m < 100$、n は 2 桁の数
n = 10B+C　 1≦B≦9、1≦C≦9 (①より C≠0)
n を並べる。

11^2= 121、・・・、19^2= 361　　51^2=2601、・・・、59^2=3481　　91^2=8281、・・・、99^2=9801
21^2= 441、・・・、29^2= 841　　61^2=3721、・・・、69^2=4761　　1^2= 1、2^2= 4、3^2= 9、4^2=16、
31^2= 961、・・・、39^2=1521　　71^2=5041、・・・、79^2=6241　　5^2=25、6^2=36、7^2=49、8^2=64、
41^2=1681、・・・、49^2=2401　　81^2=6561、・・・、89^2=7921　　9^2=81 に注意すると、
B≧5 のとき　(51^2=2601、～、99^2=9801) ①を満たす m はない。
また、 (42^2=1764、～、49^2=2401) においても同様
よって、最大の n は 41 で　　$41^2 = 1681$