数学散歩　Ⅸ－17　　　　　　　　２０１８．１０．α　　岐阜市　村山錞司

問題づくりの参考に　　：PART　５

「整数　板垣・土師　アレフ社」(大学受験参考書　昭和55年5月1日　３版発行 600円) その８

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。　　　　　　　　(最終)

C　研究編 (148p ～ 208p)　　大学数学科 (初年級) の内容、気になった定理、問題、話題などを選んで紹介　(構成)　　Ⅰ　定理の証明　　Ⅱ　合同　　Ⅲ　入試問題の背景

＜問題、解など＞

Ⅰ　定理の証明

《定理》　自然数の集合 A が空でないならば、A には最小数がある。

(本から) この定理は、次の数学的帰納法の公理 (ペアノの公理の一部) と同値であることを示す。

《公理》　数学的帰納法の公理

自然数全体の集合を N とし、その部分集合 S が次の 2 条件を満たすならば、S は N に等しい。　(ⅰ)　$1 \in S$　　(ⅱ)　$n \in S \Rightarrow n+1 \in S$

((ⅱ) の対偶)　$S \neq N \Rightarrow n \in S$ かつ $n+1 \notin S$　となる n が存在

私なりの勝手な解釈でまとめてみた。

1　公理 (数学的帰納法) ⇒　定理 (最小数の存在)　の証明

・ $A \neq \phi$　より、A は少なくとも 1 つの要素をもつ。
・ A のどの要素よりも大きくない (それ以下の) 自然数の集合を S とする。
・ $A \ni {}^{\forall}a$ 、a は自然数だから $a \geqq 1$ ∴ $S \ni 1$ ・・・①
・ また、$a < a+1$ だから　$a+1 \notin S$ で　$S \neq N$
・ ①のもとで、$S \neq N$ だから公理 (対偶) より、$m \in S$ かつ $m+1 \notin S$ となる m が存在
・ $m \in S$ で $m \notin A$ とすると　$A \ni {}^{\forall}a$ に対して $m < a$ だから $m+1 \leqq a$
　より $m+1 \in S$ となって矛盾。よって、$m \in A$
・ A の任意の元 a に対して $m \leqq a$ だから m は A の最小数 (定理)

2　定理 (最小数の存在) ⇒　公理 (数学的帰納法)　の証明

・ 自然数全体の集合を N 、N の部分集合で公理の (ⅰ)、(ⅱ) を満たすものを S とし、
　$S = N$ 即ち S の N に対する補集合 $S^c (= N-S)$ について、$S^c = \phi$　を示せばよい。
・ $S^c \neq \phi$ とすると定理より、<u>S^c には最小数 m</u> がある。
・ S は (ⅰ) を満たすから $S \ni 1$ 、 $S^c \not\ni 1$ で $m \geqq 2$
・ m は S^c の最小数だから、　$m-1 \notin S^c$　より $m-1 \in S$
・ $1 \in S$ 、 $m-1 \in S$　で $1+(m-1) =$ <u>$m \in S$</u>　　矛盾する。
・ よって、 $S^c = \phi$　∴　$S = N$

この後、本にはお馴染みの２つの定理が出ている。証明はﾎﾟｲﾝﾄのみで省略。

定理　a を正整数、b を整数とするとき、$b = aq + r$ 、$0 \leqq r < a$ となる整数 q、r が１組定まる。

整除の可能性と一意性 (ただ一組)

定理　すべての自然数は素数の積の形で表わされ、その表わし方は、因数の順序を考えなければただ一通りである。

分解可能性と一意性の証明

Ⅱ　合同　　(内容)　1　同値類　　2　合同　　　3　合同式の演習

＜冒頭の問題＞

[1]　２つの整数 a、b について、$a - b$ が 3 で割り切れるとき $a \equiv b$ と書くことにする。
　⑶　整数 a が 3 で割り切れないとき、任意の整数 b に対して、$ax \equiv b$ を満たす x が存在することを示せ。　　　　　　　　　　(東京女子大)

[2]　6 で割ると 5 余る正の整数を p とするとき、p^{2n+1} もまた、6 で割ると 5 余ることを示せ。ただし、n は正の整数とする。　　　　　　(日本大学)

(略証) [1]⑶　$a = 3m+1$ または $3m-1$ となる。
　$a = 3m+1$ のとき、$(3m+1)x - b = 3n$ より、$x = 3(n-mx) + b = 3k + b$　とおくと、
　$ax - b = (3m+1)(3k+b) - b = 3(3mx+mb+k)$　よって $ax \equiv b$　　$a = 3m-1$ も同様

[2]　$p = 6m+5 = 6(m+1)-1 = 6k-1$　だから　$p^{2n+1} = (6k-1)^{2 \cdot n}(6m+5) = \cdots = 6 \cdot T + 5$

<本から次の２問を紹介>　なお、本ではﾌｪﾙﾏｰの小定理とその証明もある。

A　n を 4 の倍数でない正整数とするとき $p = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ は 5 の倍数であることを示せ。
B　ピタゴラス３角形の３辺の積は 60 で割り切れることを示せ。

（略証）A　$1^n=1$、$2^{4k+1}=16^k\cdot 2=(5\cdot 3+1)^k\cdot 2=5a_1+2$、
$3^{4k+1}=81^k\cdot 2=(5\cdot 16+1)^k\cdot 3=5b_1+3$、　$4^{4k+1}=256^k\cdot 2=(5\cdot 51+1)^k\cdot 4=5c_1+4$、
∴　$p = 1^{4k+1} + 2^{4k+1} + 3^{4k+1} + 4^{k+1} = 5A_1 + (1+2+3+4) = 5(A_1+2)$　よって 5 の倍数
$n=4k+2$、$4k+3$ のときも同様

<追加の問題> n が 4 の倍数のときはどうなるか？

B（私の問の解釈として）

$x^2+y^2=z^2$ を満たす 3 つの正整数 x、y、z の積 xyz は 60 の倍数になる。なお、x、y、z は 2 以上で 1 以外の公約数はない（互いに素）とする。

（参考：本では（（一般解　$(m^2-n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2+n^2)^2$　から合同式を使って証明しており）・・・一般解を求めずに証明する方法もあり、各自試みよ。）とありやってみた。
（例：$(m,n|x,y,z)$：$(2,1|3,4,5)$ $(3,2|5,12,13)$ $(4,3|7,24,25)$ $(4,1|15,8,17)$ ・・・）
（略証）以下、英字は正整数とし、証明は概略のみ。

⑴　x、y の一方は奇数、他方は偶数、z は奇数
⑵　y、z が奇数のとき x は 4 の倍数で、　x、z が奇数のとき y は 4 の倍数
⑶　x、y のどちらかは 3 の倍数で、z は 3 の倍数ではない。
⑷　x、y、z のどれか 1 つは 5 の倍数

⑵～⑷より、積 xyz は 60 の倍数

Ⅲ　入試問題の背景

（内容）　1　ｲﾃﾞｱﾙ　2　ﾍﾟﾙ方程式　3　ｶﾞｳｽの整数　4　2 次体の整数

各項目とも、問題の解説による内容の説明、幾つかの定理と証明、問題などからなっている。
ここでは、参考例として 2 つの問を紹介する。

問１　m、n、p、q が整数全体を動くとき、$12m+8n$ の形の整数全体の集合を M とし、$20p+16q$ の形の整数全体の集合を N とするとき、$M = N$ であることを証明せよ。　（神戸大）

（数字のやりくり？が楽しめます。）

問２　双曲線　$x^2 - 3y^2 = 1$　・・・①　について、次のことを証明せよ。
⑴　点 (a,b) を双曲線①の上の点とすとき、点 $(2a+3b, a+2b)$ は①の上にある。
⑵　a を正の整数とするとき、　$a+\sqrt{3}b = (2+\sqrt{3})^n$　を満たす整数 a、b をとれば、点 (a,b) は双曲線①上にある。　（九州大）

（参考：ペル方程式　$x^2 - Dy^2 = \pm 1$（ D は整数））

（略証）問１　$12m+8n = 4(3m+2n)$、$20p+16q = 4(5p+4q)$
$3m+2n = 5(-m+2n)+4(2m-2n)$、$5p+4q = 3(p)+2(p+2q)$　より

問２　⑴　点 (a,b) が①上にある。　$a^2 - 3b^2 = 1$
点 $(2a+3b, a+2b)$ について　$(2a+3b)^2 - 3(a+2b)^2 = a^2 - 3b^2 = 1$

⑵　$(2+\sqrt{3})^n = a_n + \sqrt{3}\,b_n$
$a_1+\sqrt{3}\,b_1 = 2+\sqrt{3}$　、　$a_1= 2$、$b_1= 1$　$4 - 3 = 1$
$a_{n+1}+\sqrt{3}\,b_{n+1} = (2+\sqrt{3})^n(2+\sqrt{3}) = (a_n+\sqrt{3}\,b_n)(2+\sqrt{3})$
$= (2a_n+3b_n) + \sqrt{3}(a_n+2b_n)$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n+3b_n \\ b_{n+1} = a_n+2b_n \end{cases}\qquad a_{n+1}^2 - 3b_{n+1}^2 = (2a_n+3b_n)^2 - 3(a_n+2b_n)^2 = a_n^2 - 3b_n^2 = 1$$

よって、数学的帰納法より成立。

（別解として）
$a^2 - 3b^2 = (a+\sqrt{3}\,b)(a-\sqrt{3}\,b) = (2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n = (4-3)^n = 1$
・・・の答案には、10 点満点で何点つけますか？