数学散歩　Ⅸ－23　　　　　　　２０１９．１．　α　　岐阜市　村山錞司

問題づくりの参考に　　：PART　６

「確率・統計　会田・板垣　アレフ社」(大学受験参考書)　その６

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

Ｂ　応用編（52p）　　（問題［1］～［45］）　　1/3

45 の問題から何か気になった問題をいくつか紹介します。

＜問題、解など＞

[2]　ある週の月曜日から土曜日にかけて、A、B、C の 3 科目の補習授業を行うために、その時間割を作りたい。3 科目ともこの期間に 4 時間ずつ行うが、毎日の授業は 1 時限と 2 時限に分け、各時間とも 1 時間ずつとする。次の場合に時間割の作り方の個数を求めよ。

⑴　毎日 1 時限、2 時限とも同じ科目とする場合。

⑵　1 時限と 2 時限の科目が同じ科目でも異なる科目でもよい場合。

⑶　毎日 1 時限と 2 時限を異なる科目とする場合。

（参考：時限と時間が混乱している。3行目の各時間は時限。6日間×2時限 = 3科目×4時間 = 12ｺﾏ。）

（昔、進学校の進路指導室で、夏休みの補習授業の時間割作成でのやりくりの苦労を思い出します。）

（略解）⑴　月曜日から土曜日までの 6 日間を 2 日ずつ 3 科目に分ければよい。

$_6C_2 \times {_4C_2} = 90$（通り）　　（本　6!/2!2!2!）

⑵　6 × 2 = 12（ｺﾏ）を 4（ｺﾏ）ずつ 3 科目に分ける。

$_{12}C_4 \times {_8C_4} = 34650$（通り）　　（本　12!/4!4!4!）

⑶　6 日間から 4 日選んで(A)科目とし、その 4 日から 2 日選び、残りの 2 日とで 4 日として(B)科目、残った 2 日と 2 日を合わせた 4 日で(C)科目。　（例　A A A A B B / B B C C C C）

また、1 時限と 2 時限の 2 通りある。

$_6C_4 \times {_4C_2} \times 2^6 = 5760$（通り）　　（本　$(6!/2!2!2!) \times 2^6$）

[6]　ある試験において、20 点満点の問題が 5 題出題されている。いずれも 0 点、5 点、10 点、15 点、20 点のいずれかで全部を採点するものとする。

⑴　起こりうる採点の仕方は何通りあるか。

⑵　少なくとも 3 問が正解である場合は何通りあるか。

⑶　総得点が 80 点以上である場合は何通りあるか。

（略解）⑴　1 問 5 通りの採点で、　$5^5 = 3125$（通り）

⑵　5 問中 3 問が正解で 2 問は 20 点でないか、5 問中 4 問が正解で 1 問は 20 点でないか、5 問とも正解となり、　$_5C_3 \times 4 \times 4 + {_5C_4} \times 4 + 1 = 181$（通り）

⑶　場合分けして考える。

100 点	20×5			1 通り
95 点	20×4+15	$_5C_4 = 5$		5 通り
90 点	20×4+10	$_5C_4 = 5$	5通り	15 通り
	20×3+15×2	$_5C_3 = {_5C_2} = 10$	10通り	
85 点	20×4+5	$_5C_4 = 5$	5通り	35 通り
	20×3+<u>15+10</u>（10+15）	$_5C_3 \times \underline{2} = 20$	20通り	
	20×2+15×3	$_5C_2 = 10$	10通り	
80 点	20×4	$_5C_4 = 5$	5通り	70 通り
	20×3+15+5	$_5C_3 \times \underline{2} = 20$	20通り	
	20×3+10×2	$_5C_3 = {_5C_2} = 10$	10通り	
	20×2+15×2+10	$_5C_2 \times {_3C_2} = 30$	30通り	
	20×1+15×4	$_5C_1 = 5$	5通り	合計　126（通り）

（⑶の別解：本の解説から）　80点の場合、20点の減点だから、5点の減点を、5問から重複を許して4個とればよいから、

80 点　$_5H_4 = {_8C_4} = 70$

85 点　$_5H_3 = {_7C_3} = 35$

90 点　$_5H_2 = {_6C_2} = 15$

95 点　$_5H_1 = {_5C_1} = 5$

100 点　1

合計　126（通り）　　（同じ結果を得る。）

[7]　10 人の人が、1 列に並んだ 20 個の席にでたらめに着席する。このとき、間に空席をはさまないで隣り合った一団を連とよび、1 つの連における人数を連の長さという。長さが 1、2、3、4 である連がそれぞれ 1 個ずつできるような並び方は何通りあるか。

（略解）① 4 つの連の並べ方は 4！（通り）ある。

② 連の 4 つの間にはそれぞれ空席が 1 個必要で、計 3 個の空席。残りの空席数は、

20 － 10 － 3 ＝ 7 （席）　　（10 ＝ 1+2+3+4）

③ 7 個の空席が入れられるのは、連の間の 3 個と、両端の 2 個で、3+2=5 か所。

④ 入れ方は重複を許して、5 か所から 7 か所選んで、 ${}_5H_7 = {}_{11}C_7 = {}_{11}C_4$ （通り）ある。

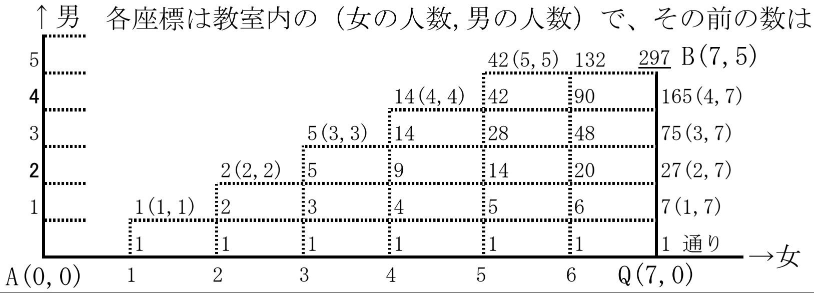
⑤ 座席が決まれば、10 人を並べて 10！（通り）

よって、$4! \times {}_{11}C_4 \times 10! = 28740096000$ （通り）　　（検算をお願いします。）

[9]　男 5 人と女 7 人とが、1 人ずつ順に教室に入るのに、教室内の男の数が女の数より多くならないようにする入り方は何通りあるか。ただし、人数のみの比較とする。

（略解）（本の解とは異なる。）教室への入り方の数（通り）を図示する。

↑男　各座標は教室内の（女の人数, 男の人数）で、その前の数は、そこに至る方法の数。



よって、
297（通り）
（解説略）

[11]　n 個の異なるボールを n 個の異なる箱にランダムに入れた場合、ちょうど 1 個の箱が空である確率を求めよ。

（略解）ちょうど 1 箱が空であるとは、もう 1 箱にはボールが 2 個入り、残りの n−2 箱のすべてには 1 個のボールが入ることになる。

① n 個のボールを n 個の箱に入れる入れ方は、n^n 通り

② 空の 1 箱のとり方 n 通り

③ ボールが 2 個入る箱のとり方は n−1 通りで、2 個のボールのとり方は、${}_nC_2$ 通り

④ 残り n−2 個のボールの入れ方は、(n−2)！ 通り

よって確率は、 $\dfrac{n(n-1)\cdot{}_nC_2\cdot(n-2)!}{n^n} = \dfrac{n!\cdot{}_nC_2}{n^n}$

[14]　箱の中に赤札 6 枚、白札 5 枚、黒札 9 枚が入れてある。この 20 枚は、箱から取り出すまで区別できないとする。また、この中から 1 枚ずつ取り出して、元に戻さない。次の確率を求めよ。（答は分数で表せ）

⑴　4 番目に取り出した札が初めての赤札であり、5 番目に取り出した札が 2 回目の白札である。

⑵　10 番目に取り出した札が初めての白札である。

⑶　初めと終わりが黒札である。

（略解）⑴　$\dfrac{{}_9C_2\times{}_5C_1}{{}_{20}C_3}\times\dfrac{6}{17}\times\dfrac{4}{16} = \dfrac{9}{646}$　　⑵　$\dfrac{{}_{15}C_9}{{}_{20}C_9}\times\dfrac{5}{11} = \dfrac{35}{2584}$

⑶　$\dfrac{9}{20}\times\dfrac{{}_{11}C_{11}\times{}_8C_7}{{}_{19}C_{18}}\times\dfrac{1}{1} = \dfrac{18}{95}$　　（⑴、⑵、⑶ともに別の方法もあり。）

[18]　次の問に答えよ。

⑴　$P(A) = 1/3$、$P(B) = 1/2$、$P(A\cup B) = 3/4$ のとき

①　A、B は独立であるか。　　②　A、B は排反であるか。

⑵　事象 A、B、C が独立のとき、A∪B と C もまた独立であることを示せ。

⑶　1 個の硬貨を 3 回投げるとき、i 回目に表が出るという事象を H_i とするとき、$P(H_1\cup H_2 | H_1\cup H_2\cup H_3)$ （＝ $P_{H1\cup H2\cup H3}(H_1\cup H_2)$ ）を求めよ。

（略解）⑴①$P(A\cap B)=1/12$、$P(A)\cdot P(B)=1/6$ で独立ではない。② $P(A\cap B)\neq 0$ で排反ではない。

⑵ $P((A\cup B)\cap C)=P(A\cup B)\cdot P(C)$ を示せばよい。　（$=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)$）

⑶ $H_1\cup H_2\cup H_3$：　○○○、○○×、○×○、○××　　$H_1\cup H_2$：　○○○、○○×、○×○、○××

×○○、×○×、××○　(7)　　×○○、×○×　(6)

（○：表、×：裏）　　よって、6/7