数学散歩　Ⅸ - 24　　　　　　　　　　２０１９．１．　β　　岐阜市　村山錞司

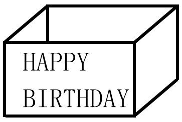
問題づくりの参考に　　：PART　6

「確率・統計　会田・板垣　アレフ社」(大学受験参考書)　その７

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜追加の問題＞「頭の回転が 200% アップするクイズ（青春出版社）」から

Q1　未開封にしてください




Q2　線を一本加えて等式を成立させよう。

1 + 2 + 3 = 1　2　2

(答は後掲)

B　応用編 (52p)　　　(問題 [1]～[45])　2/3

45 の問題から何か気になった問題をいくつか紹介します。

＜問題、解など＞

[20]　3 つの互いに独立な事象 A、B、C があって、A の起こる確率は 1/2 、A、B、C がともに起こる確率は 1/24 、また、A、B、C のいずれも起こらない確率は 1/4 である。

⑴　B の起こる確率、C の起こる確率を求めよ。

⑵　A、B、C のうち 1 つだけ起こる確率を求めよ。

(略解) ⑴　$P(A)=1/2$、$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)=1/24$ より、$P(B)P(C)=1/12$

また、$P(A^c\cap B^c\cap C^c)=P((A\cup B\cup C)^c)=1-P(A\cup B\cup C)=1/4$ より、

$3/4=P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$

$=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(B)P(C)-P(C)P(A)+P(A)P(B)P(C)$

$=1/2+(1/2)(P(B)+P(C))-(1/12)+(1/2)(1/12)$　・・・　∴　$P(B)+P(C)=7/12$

P(B)、P(C) を 2 根とする 2 次方程式は、$12t^2-7t+1=0$　で　$t=1/4$、$1/3$

$P(B)=1/4$、$P(C)=1/3$ か $P(B)=1/3$、$P(C)=1/4$

⑵　A、B、C のうち 1 つだけ起こる確率は、

$P(A\cup B\cup C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+2\cdot P(A\cap B\cap C)$

$=(3/4)-(1/2)(1/4)-(1/4)(1/3)-(1/3)(1/2)+2(1/2)(1/4)(1/3)=11/24$

(⑵について本では)　A、B、C のうち 1 つだけ起こる確率は、A、B、C が独立だから、

$P(A\cap B^c\cap C^c)$ + $P(A^c\cap B\cap C^c)$ + $P(A^c\cap B^c\cap C)$

$=$ $P(A)P(B^c)P(C^c)$ + $P(A^c\cap P(B)P(C^c)$ + $P(A^c)P(B^c)P(C)$

$=$ $(1/2)(3/4)(2/3)+(1/2)(1/4)(2/3)+(1/2)(3/4)(1/3)=11/24$

(参考)　$P(A\cap B^c\cap C^c) = P(A\cap(B\cup C)^c) = P(A)-P(A\cap(B\cup C))$

$= P(A)-P((A\cap B)\cup(A\cap C)) = P(A)-(P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C))$

$= P(A)(1-P(B)-P(C)+P(B\cap C)) = P(A)(1-P(B))(1-P(C)) = P(A)P(B^c)P(C^c)$

( $P(A^c\cap B\cap C^c)$ 、 $P(A^c\cap B^c\cap C)$ も同様 )

[22]　n 個のサイコロのおのおのを m 回つづけて振るとき、次の確率を求めよ。

⑴　少なくとも 1 個は m 回つづけて 1 の目が出る。

⑵　n 個のおのおのに少なくとも 1 回 1 の目が出る。

(略解)⑴ ①　サイコロ 1 個が m 回つづけて 1 の目が出る。　$\left(\frac{1}{6}\right)^m$

② n 個のどのサイコロも m 回つづけて 1 の目が出ることはない。$\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^m\right)^n$

③ 少なくとも 1 個は m 回つづけて 1 の目が出る。　$1-\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^m\right)^n$

⑵ ① m 回のうち 1 回も 1 の目が出ない。　$\left(\frac{5}{6}\right)^m$

② m 回のうち少なくとも 1 回は 1 の目が出る。　$1-\left(\frac{5}{6}\right)^m$

③ n 個のおのおのに少なくとも 1 回も 1 の目が出る。　$\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^m\right)^n$

[24]　不良品も混じっている数多くの製品を入れた箱がある。この箱から勝手に製品を 1 個取り出しては元に戻す。これを 3 回繰り返すときに、不良品が多くとも 1 回現れる確率を p とし、6 回繰り返すときには、不良品が多くとも 2 回現れる確立を q とする。この箱の製品中に不良品の含まれている割合を x とするとき、

⑴　pとq をそれぞれ x で表せ。

⑵　p よりも q が小さくないならば、x は大きくともいくらか。

（感想：「多くとも 1 回」、「多くとも 2 回」、「小さくない」、「大きくとも」の表現が何か気になりました。）

（略解）⑴　3 回のうち「多くとも 1 回」だから、0 回か 1 回で、

$$p = {}_3C_0(1-x)^3 + {}_3C_1x(1-x)^2 = (1-x)^2(1+2x)$$

6 回のうち「多くとも 2 回」だから、0 回か 1 回か 2 回で、

$$q = {}_6C_0(1-x)^6 + {}_6C_1x(1-x)^5 + {}_6C_2x^2(1-x)^4 = (1-x)^4(1+4x+10x^2)$$

⑵　p よりも q が小さくないから、$p \leqq q$ で、$(1-x)^2(1+2x) \leqq (1-x)^4(1+4x+10x^2)$

$0<x<1$ より、$(1-x)^2>0$ 、$x^2>0$ だから、不等式は

$10x^2-16x+3 \geqq 0$ 解いて、$x \leqq \dfrac{8-\sqrt{34}}{10}$ 、$x \geqq \dfrac{8+\sqrt{34}}{10}$

$\therefore \quad 0 < x \leqq \dfrac{8-\sqrt{34}}{10}$　よって、x は大きくとも $\dfrac{8-\sqrt{34}}{10}$

[29]　2 つのエンジンを持つ飛行機 A と、4 つのエンジンを持つ飛行機 B において、いずれも故障していないエンジンが半数以上あれば安全飛行できるものとする。各エンジンの故障する確率は p で、故障は他のエンジンとは無関係とする。A と B とはどちらが安全か。

（感想：怖い問題です。できれば、こんな心配をしないで飛行機に・・・）

（略解）　×　故障している　　○　故障していない

A ：　○○　○×　×○　　　$P(A) = (1-p)^2 + {}_2C_1(1-p)p = 1-p^2$

B ：　○○○○　○○××　　$P(B) = (1-p)^4 + {}_4C_1(1-p)^3p + {}_4C_2(1-p)^2p^2$

　　　　　　　　○×○×　　$= (1-p)^2(1+2p+3p^2)$

　　○○○×　○××○　　$\therefore \quad P(B)-P(A) = p^2(1-p)(1-3p)$

　　○○×○　×○○×　　$1/3 < p < 1$ のとき、$P(B)<P(A)$

　　○×○○　×○×○　　$p < 1/3$ のとき、$P(B)>P(A)$

　　×○○○　××○○　　$p = 1/3$ のとき、$P(B)=P(A)$

[30]　A、B 2人が連続してゲームをする場合に、どちらかが 2 回続けて勝てば賞を得る。いま、各ゲームで A の勝つ確率が 1/2、A が負ける確率が 1/4、引き分けとなる確率が 1/4 であるとき、次の 3 つの場合に、B が賞を得る確率を求めよ。

⑴　ゲーム開始前　⑵　第 1 回のゲームに B が勝ったとき

⑶　第 1 回のゲームに A が勝ったとき

（略解）　⑴、⑵、⑶での B が賞を得る確率を x、y、z とする。

また、各ゲームでの B の確率は、　勝つ 1/4、負ける 1/2、引き分ける 1/4

⑴の場合：次の第 1 回は、B が勝つ(1/4)、B が負ける(1/2)、引き分ける(1/4)、だから

$x = (1/4)\cdot y + (1/2)\cdot z + (1/4)\cdot x$　より、$3x - y - 2z = 0$　… ①

⑵の場合：次の第 2 回は、B が勝つ(1/4)、B が負ける(1/2)、引き分ける(1/4)か、だから、

$y = (1/4) + (1/2)\cdot z + (1/4)\cdot x$　より、$x - 4y + 2z = -1$　… ②

⑶の場合：同様に、　$z = (1/4)\cdot y + (1/4)\cdot x$　より、$x + y - 4z = 0$　… ③

（点検をよろしく。）　解いて、　$x = 3/13$、$y = 5/13$、$z = 2/13$

[34]　サイコロを n 個振って、1 の目の出た個数と同じ枚数の硬貨を投げるとき、少なくとも 1 枚表の出る確率を求めよ。

（略解）　①　n 個振って、1 の目が r 個出る確率は、$ {}_nC_r \left(\dfrac{1}{6}\right)^r \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-r}$

②　r 個の硬貨を投げて少なくとも 1 枚表が出る確率は、$1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^r$

$r = 0$、1、・・・、n で、①、②より求める確率は、

$$\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r \left(\frac{1}{6}\right)^r \left(\frac{5}{6}\right)^{n-r} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^r\right)$$

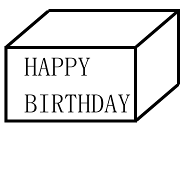
$$= \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r \left(\frac{1}{6}\right)^r \left(\frac{5}{6}\right)^{n-r} - \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r \left(\frac{1}{12}\right)^r \left(\frac{5}{6}\right)^{n-r}$$

$$= \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{12} + \frac{5}{6}\right)^n = \boxed{1 - \left(\frac{11}{12}\right)^n}$$

＜追加の問題の答＞

Q1


→




Q2

1 + 2 + 3 = 1　2/ 2