数学散歩　Ⅸ‐25　　　　　　　　　２０１９．２．　α　　岐阜市　村山錞司

問題づくりの参考に　　：PART　６

「確率・統計　会田・板垣　アレフ社」(大学受験参考書)　その８　（最終）

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

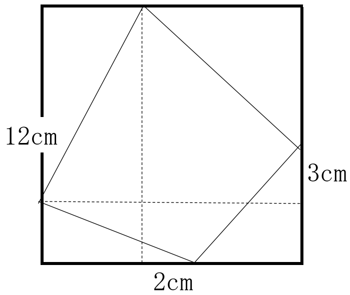
＜追加の問題＞

「大人もハマる算数 解けたら感動！ 脳も若返る 49 問　後藤卓也　すばる舎」から

レベル５ の問題

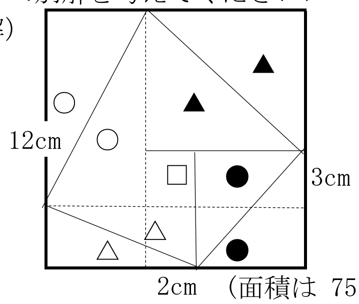
（人気の問題？だそうだ。
「数学散歩」でも過去に
扱ったような気がするが。）

＜問題＞　図のように、 一辺の長さが 12 cm　の正方形に縦線、横線をひき、各辺上に、 2 cm、3 cm の長さをとって、四角形をつくる。その面積は何cm² か。




＜別解を考えてください＞

（解）




（面積は 75 cm² ）

□=6、○+△+●+▲=(144-6)/2

B　応用編 (52p)　　　　(問題［1］～［45］)　3/3

この本の紹介は、ここで最終とします。なお、この後は、次の内容になっています。

（参考として）　C 研究編

Ⅰ 確率の定義の再検討 Ⅱ 試行の独立　Ⅲ 従属試行とマルコフ連鎖

＜問題、解など＞

［36］　ある人が n 通りの手紙を書き、宛先を前もって書かないまま、封筒に入れて封をした。その後、でたらめにそれらの封筒に n 通りの手紙の宛先を書いた。少なくとも 1 つの宛先に予定した手紙が入っている確率はいくらか。

（私のメモ書きに、「ﾍﾞﾙﾇｰｲ ｵｲﾗｰ 封筒入れ違い問題」とある。興味のある方は、ﾈｯﾄで検索を。）

〔本の解説を参考に〕n 通りの手紙を　$a_1$、$a_2$、…、$a_n$　それぞれの対応した宛名を書いた封筒を $b_1$、$b_2$、…、$b_n$　、手紙と封筒がどれも一致しない場合の数を $F_n$ として、$F_n$ を求める。

＜$a_1$ を $b_2$ に入れる＞　次の 2 通りの場合が考えられる。

① $a_2$ を $b_1$ に入れた場合　　$a_1$、$a_2$、…、$a_n$ / $b_1$、$b_2$、…、$b_n$　　$a_3$、…、$a_n$ と $b_3$、…、$b_n$ の n−2 個が一致しないから、 $F_{n-2}$ 通りある。

② $a_2$ を $b_1$ 以外に入れた場合　　$a_1$、$a_2$、…、$a_n$ / $b_2$、$b_1$、…、$b_n$　　$a_2$、$a_s$、…、$a_n$ と$b_1$、$b_3$、…、$b_n$ の n−1 個が一致しないから、 $F_{n-1}$ 通りある。

最後に $a_1$ の入れ方は、 $b_2$、$b_3$、…、$b_n$　の n−1 通りの入れ方があるから、

①、②より総数は、　$F_n = (n-1)(F_{n-1} + F_{n-2})$ （ $n \geqq 3$）

（例）　$F_1 = 0$、　　$F_3 = 2(0+1) = 2$　　　$F_4 = 3(1+2) = 9$

$F_2 = 1$、

| 手 | 封 |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 1 |

| 手 | 封 | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 2 |

| 手 | 封筒 | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 2 | 1 | 3 | 4 | 4 | 1 | 4 | 3 | 1 | 3 |
| 3 | 4 | 4 | 1 | 1 | 4 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 4 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 |

＜確率１＞ n 個の封筒にはどれも対応する手紙が入っていない確率 $P_n$ は、手紙の入れ方が n! 通りあるから、$P_n = \dfrac{F_n}{n!} = (n-1)\left\{\dfrac{F_{n-1}}{n!} + \dfrac{F_{n-2}}{n!}\right\}$

$$= (n-1)\left\{\frac{1}{n}\cdot\frac{F_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{n(n-1)}\cdot\frac{F_{n-2}}{(n-2)!}\right\}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)P_{n-1} + \frac{1}{n}P_{n-2} \qquad \therefore \quad P_n - P_{n-1} = -\frac{1}{n}(P_{n-1} - P_{n-2})$$

ここで、　$P_1 = F_1 = 0$、 $P_2 = \dfrac{F_2}{2} = \dfrac{1}{2}$

$P_n - P_{n-1} = \cdots = (-1)^n / n!$　だから

$P_n = P_1 + (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + \cdots + (P_n - P_{n-1})$

$$= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}$$

＜確率２＞少なくとも 1 つの宛先には予定した手紙が入っている確率は、$1-P_n$ で

$$1-P_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots - (-1)^n \frac{1}{n!}$$

(参考１) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$

$x = -1$ として $\frac{1}{e} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots$

$$\therefore \quad 1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots = 0.6321\cdots$$

(参考２) 本に私のメモ書き（何かの参考書から別の証明？）がはさんであり、概略を紹介する。

(概略) n 通りの手紙を $a_1$、$a_2$、…、$a_n$ とし、手紙 $a_i$ が正しい宛名の封筒に入る事象を $A_i$ とすると、

$P(A_i) = (n-1)! / n! = 1/n$ 、 ($i \neq j$ のとき) $P(A_i \cap A_j) = (n-2)! / n! = 1/n(n-1)$、・・・、

$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = (n-k)! / n! = 1/n(n-1)\cdots(n-k+1)$ (証明は数学的帰納法で)

「少なくとも 1 通が正しい封筒に入っている。」事象は、 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ で

その確率は、 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) - (P(A_1 \cap A_2)+\cdots+P(A_{n-1} \cap A_n))$$

$$+ (P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)+\cdots+P(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

$$= \frac{{}_nC_1}{n} - \frac{{}_nC_2}{n(n-1)} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots - (-1)^n \frac{1}{n!}$$

前掲<確率２>の $1 - P_n$ と同じ。

[38] 2 つのマッチ箱 A、B にそれぞれ r 本ずつマッチ棒が入っている。この 2 つのマッチ箱を同じポケットに入れておいて、マッチを使うときには、1 回ごとにでたらめに（確率1/2ずつ）取り出し、そのマッチ箱の中のマッチ棒を 1 本使うものとする。マッチ棒を補充せずにこのような使い方をするとき、N 回目で初めて空のマッチ箱を取り出す確率を求めよ。ただし、使ったマッチ棒はマッチ箱に入れないものとし、$N \leqq 2r+1$ とする。

◎ 「バナッハのマッチ箱の問題」（参考までに、ネットで検索も）。「マッチ箱ってなあに？」という時代かも。一日約 30 本ほど吸った私も数年前に禁煙、他人のがケムくさくて！！！。

<本の解説を参考にして>

求める事象（N 回目で初めて空のマッチ箱を取り出す）の確率を $P_N$ とする。

① $N \leqq r$ のとき： 1 つの箱には r 本のマッチ棒、r 回で箱は空になる。

空の箱を取り出すのは、r+1 回が必要。$N \leqq r$ のとき空の箱は取り出せない。$\underline{P_N = 0}$

② $N \geqq r+1$ のとき：($N-1 \geqq r$) A が空になるのは、1 回目から N-1 回取り出す間に、r 回箱 A を、残りは箱 B から取り出し、N 回目に A から取り出すと空になる。

$${}_{N-1}C_r \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \times \frac{1}{2} = {}_{N-1}C_r \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

B が空になる場合も同じだから、

$$P_N = 2 \times {}_{N-1}C_r \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^N = {}_{N-1}C_r \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$$

何故か本では、

$${}_{N-1}C_r = \frac{(N-1)!}{r! \cdot (N-r-1)!}$$

と変形している。

よって求める確率は、$N \leqq r$ のとき $P_N = 0$ 、$r+1 \leqq N \leqq 2r+1$ のとき $P_N = {}_{N-1}C_r \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$

(例) $r = 2$ のとき、 $P_0 = P_1 = P_2 = 0$

($3 \leqq N \leqq 5$) $P_3 = {}_2C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$、 $P_4 = {}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$、

$P_5 = {}_4C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$ $\quad \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = 1$

---

$r = 3$ のとき、 $P_0 = P_1 = P_2 = P_3 = 0$

($4 \leqq N \leqq 7$) $P_4 = {}_3C_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$、 $P_5 = {}_4C_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$、

$P_6 = {}_5C_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{16}$、 $P_7 = {}_6C_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{5}{16}$ $\quad \frac{1}{8} + \cdots + \frac{5}{16} = 1$

---

$r = 4$ のとき、 $P_0 = P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 0$ ($5 \leqq N \leqq 9$)

$$P_5 = {}_4C_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}、\quad P_6 = \frac{5}{32}、\quad P_7 = \frac{1}{64}、\quad P_8 = \frac{35}{128}、\quad P_9 = \frac{35}{128}$$

$$\frac{1}{16} + \cdots + \frac{35}{128} = 1$$

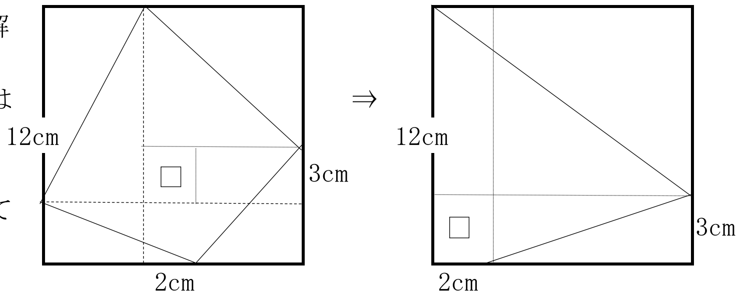
（問）（確認事項）　$P_{2r+1} = P_{2r}$　を示せ。

$$P_{2r+1} = {}_{2r}C_r \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2r} = \frac{(2r)!}{r! \cdot r!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2r} = \frac{(2r-1)!}{r! \cdot (r-1)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2r-1}$$

$$= {}_{2r-1}C_r \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2r-1} = P_{2r}$$

（何か奇妙な感じがするのですが如何ですか？）

レベル５ の問題の別解
＜極端化する。＞
縦と横の点線の位置はどこでもいいと解釈できるから、左辺と下辺に移動して右の図になる。




面積 = 12×12 － 12・(12－3)/2 － 3・(12－2)/2 = 9・12/2 + 10・3/2 + 3・2 = 75(㎠)

（同様に、点線を左右、上下に端まで移動させると、次のように 3 通りできる。）