数学散歩　Ⅸ－27　　　　　　　２０１９．３．　α　　岐阜市　村山錞司

問題づくりの参考に　　　：PART　7

「フェルマーの最終定理　：　$x^n+y^n=z^n$ (n≧3)は自然数解 x、y、z をもたない。」　②

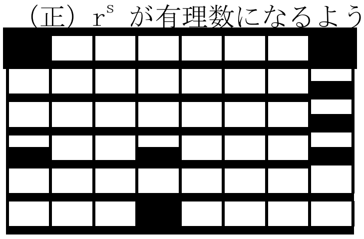
ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜前回（特別参加）の訂正とお詫び＞うっかりミスが２件ありました。訂正をお願いします。

（誤）ｷｰｽ・?ﾃﾞﾌﾞﾘﾝ　→　（正）ｷｰｽ・ﾃﾞﾌﾞﾘﾝ

（誤）r^s が有理数になるような r、s　→　（正）r^s が有理数になるような無理数 r、s

＜追加の問題＞
知力を鍛える究極パズル
（日本評論社）から
「秘密の暗号」
(Q116の中のQ2)
暗号は何ですか？



＜記事、問題など＞

Ａ　フェルマーの最終定理　サイモン・シン　青木薫 訳　新潮文庫

「友愛数」　一方の数が他方の数の約数の和になっている二つの数

（例）　$220 = 2^2\times5\times11$　　約数の和　1+2+4+5+10+20+11+22+44+55+110 = 284

$284 = 2^2\times71$　　約数の和　1+2+4+71+142 = 220　　　（ピタゴラス教団）

（演習）次の二数は友愛数であることを示せ。

①　17,296 と 18,416　（1636 年　フェルマーが発見）

②　9,363,584 と 9,437,056　（3 番目のペア　デカルトが発見）

・・・レオンハルト・オイラーは 62 組ものペアをあげている・・・

③　1,184 と 1,210　（16 歳のイタリア人　ニコロ・バカニーニが 1866 年に発見）

（参考）　①　$17,296 = 2^4\times23\times47$　、　$18,416 = 2^4\times1,151$

②　$9,363,584 = 2^7\times191\times383$　、　$9,437,056 = 2^7\times73,727$

③　$1,184 = 2^5\times37$　、　$1,210 = 2\times5\times11^2$

素因数分解の点検と約数の和のチェックをよろしく。

感想として：どうやって二数を見つけたのか不思議。方法を知りたいが？

「フェルマーが世に問うた難問の一例
二乗数と三乗数に挟まれた数は 26 以外にはない。　（$5^2 = 25 < 26 < 27 = 3^3$）」

ﾌｪﾙﾏｰは・・・証明してみろと数学界に挑戦状をつきつけた。

（参考）　本には証明らしきものはない。前掲の本のＢを参考にして・・・少しだけやってみた。

楕円曲線 $y^2 = x^3 - 2$ を満たす自然数解の組は (x,y) = (3,5) だけである。

点(3,5) における接線と曲線との交点は・・・？

女性数学者の活躍の 10 数ページにわたってのいろいろな話題

ｿﾌｨｰ・ｼﾞｪﾙﾏﾝ、紀元前 6 世紀のﾃｱﾉ、4 世紀のﾋｭﾊﾟﾃｱ、ﾏﾘｱ・ｱﾆｪｼ(1718生)、ｴﾝﾐ・ﾈｰﾀｰ、ｿｰﾆｬｰ・ｺﾜﾚﾌｽｶﾔ、・・・

金メダルと 3,000 ﾌﾗﾝの懸賞

ﾌｪﾙﾏｰの最終定理の解決に対して、ﾌﾗﾝｽ科学学士院は上記の懸賞をかけた。

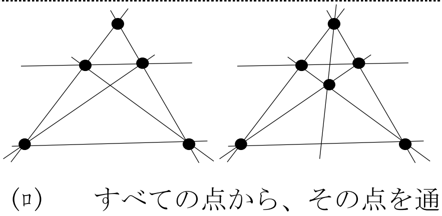
素因数分解の一意性

・　ｶﾞﾌﾞﾘｴﾙ・ﾗﾒとﾙｲ・ｺｰｼｰの競争

・　ｴﾙﾝｽﾄ・ｸﾝﾏｰが、二人の証明の根本的な問題は、どちらも素因数分解の一意性にあると指摘。　$12 = 2\times2\times3 = (1+\sqrt{-11})(1-\sqrt{-11}) = (2+\sqrt{-8})(2-\sqrt{-8}) = \cdots$

＜点予想（点と線の問題）＞何十年もの間、未解決だった問題

どの直線上にも少なくとも三つの点があるような（平面）図を作ることは不可能である。ただし、すべての点が一直線上にあるものを除く。

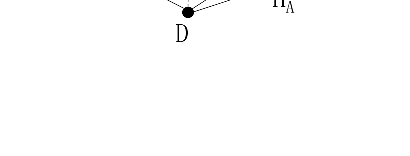


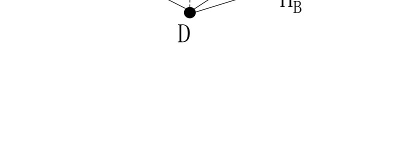
巻末に「補遺6 点予想の証明」として、解説などあり。
私なりの解釈で次に証明を紹介する。

(ｲ)　平面上にいくつかの任意の点をとり、そのすべての点を直線で結ぶ。

(ﾛ)　すべての点から、その点を通らないすべての直線に垂線を下す。点と線との距離（垂線の長さ）の中の最も短いものを選ぶ。

(ﾊ)　(ﾛ)で選んだ点 D と直線 L について、直線 L は常にその上に(ｲ)の点を 2 点だけ含むことを示す。





三番目の点 D_A が二点A、Bの外側にあったとすると、 BH_A ＜ HD（最短）

三番目の点 D_B が二点A、Bの内側にあったとすると、 D_BH_B＜ HD （最短）

⑴、⑵のどちらもあり得ない。どの配置にしても少なくとも 1 本は(ｲ)での点が 2 点しかない直線が存在する。

「14-15 パズル」－米国の天才 ｻﾑ・ﾛｲﾄﾞ(1841～1911) による

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

左図で 15 枚のタイルをすべらせて 14 と 15 の位置を入れかえよ。

ﾛｲﾄﾞは賞金の 1,000 ドルを払わなくてよいことに自信をもっていた。

・・・不可能であることを知っていたからだ。

（右下の空きマスを利用してずらす。）

（証明の概略－不変量）

変数 D は大、小が逆の順になっているペアの数を示す。

(ｱ)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

(ｲ)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	12	15
13	14	11	

(ｳ)

1	2	3	4
5	6	12	7
9	10	8	15
13	14	11	

(ｱ)　最初の正しい並び順で D = 0

(ｲ)　(12,11)、(15,13)、(15,14)、(15,11)、(13,11)、(14,11)　で D = 6

(ｳ)　(12,7)、(12,9)、(12,10)、(12,8)、(12,11)、(9,8)、(10,8)、(15,13)、(15,14)、(15,11)、(13,11)、(14,11)　で D = 12

(ｱ)の太線内を左回りに回転すれば(ｲ)になる。なお、空きマスは移動により右下にずらす。

(ｲ)の太線内を回転すると、

12	7
11	8
15	×

さらに太線内を回転すると(ｳ)になる。

（12 を先頭にして回す）

(ｱ)、(ｲ)、(ｳ)の D の値は 0、6、12 で偶数（不変量）。

問題の図は (15,14) だから D = 1 で奇数となり、入れ替えは不可。

(ｱ)　(15-14 を目標に、太線枠内を回転)

（参考）

10	11	12
14	15	

→

10	15	11
14	12	

→

15	11	12
10	14	

→

11	12	14
15	10	

→ D=2

11	10	12
15	14	

⇒

15	11	10
14	12	

遊べます。⇒

15	10	12
14	11	

→ D=2

10	12	11
15	14	

⇒

15	12	11
14	10	

→ D=4

12	11	10
15	14	

３通りあり。

＜ﾊﾞｰﾄﾗﾝﾄﾞ・ﾗｯｾﾙのパラドックス＞

「集合というものは、あるときはそれ自身の要素になり、またあるときにはそうでないように見えたのである。たとえばｽﾌﾟｰﾝの集合はｽﾌﾟｰﾝではない。だが、ｽﾌﾟｰﾝでないものの集合は、ｽﾌﾟｰﾝでないものの一つなのだ。」・・・→破滅的なパラドックスへとつながった。

＜ｸﾙﾄ・ｹﾞｰﾃﾞﾙ(1906生)の不完全性定理＞

ｹﾞｰﾃﾞﾙが証明したのは、完全で無矛盾な数学体系を作るのは不可能だということだった。

第一不完全性定理：公理的集合論が無矛盾ならば、証明することも反証することもできない定理が存在する。

第二不完全性定理：公理的集合論の無矛盾性を証明する構成的手続きは存在しない。

（参考として本では）・・・ｴﾋﾟﾒﾆﾃﾞｽはｸﾚﾀ島の出身だった（かつてｸﾚﾀ島出身者には嘘つきが多いとされていた）。その彼がこう主張した。「私は嘘つきだ」・・・この主張の真偽は？

→　この命題は証明できない。

「有限個から無限個への理論展開の危険なギャンブル」

（例）　31、331、3,331、33,331、333,331、3,333,331、33,333,331 は素数である。

問１　333,333,331が素数であるか、電卓などを利用して調べよ。

＜オイラー予想の反例＞

$x^4 + y^4 + z^4 = w^4$　には自然数解がない。

（反例）　1988 年、ﾊｰﾊﾞｰﾄﾞ大学のﾉｰﾑ・ｴﾙｷｰｽは次の解を、さらに無数の解があることも証明した。

$2,682,440^4 + 15,365,639^4 + 18,796,760^4 = 20,615,673^4$

（検算？電卓ではとてもとても、Excel でもどうやって？　それにしても４数の不思議？）

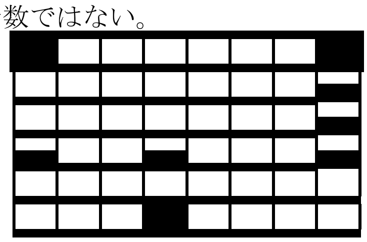
＜解答、解説＞

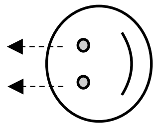
問１　333,333,331は素数であるか、電卓などを利用して調べよ。

（解）　333,333,331 = 17 × 19,607,843　素数ではない。

＜追加の問題＞

暗号は・・・ＨＥＬＬＯ





左を上にしてよく見てください。
分かるかも？
私も答を見ても？？？でした。