数学散歩　Ⅸ－28　　　　　　　　２０１９．３．　β　　岐阜市　村山鋅司

問題づくりの参考に　　：PART　7

「フェルマーの最終定理 ： $x^n+y^n=z^n$ (n≧3)は自然数解 x、y、z をもたない。」③

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜暇つぶし＞　「頭がよくなる！大人のＩＱクイズ　逢沢明 PHP文庫」 から

(90 問の中の) Quiz 015 (改題)

数 5 を 5 個と ＋－×÷とカッコを使い 1 から 10 までをつくる。 (類題　海城中学)

A　$\boxed{5\quad 5\quad 5\quad 5\quad 5}$	= 1	5 ＋ 5 ÷ 5 ＋ 5 － 5	= 6
5 － 5 ＋(5 ＋ 5)÷ 5	= 2	5 ＋ 5 ÷ 5 ＋ 5 ÷ 5	= 7
(5 × 5 － 5 － 5)÷ 5	= 3	5 ＋ 5 －(5 ＋ 5)÷ 5	= 8
(5 ＋ 5 ＋ 5 ＋ 5)÷ 5	= 4	(5 × 5 － 5)÷ 5 ＋ 5	= 9
5 － 5 ＋ 5 － 5 ＋ 5	= 5	B　$\boxed{5\quad 5\quad 5\quad 5\quad 5}$	=10

A、Bをつくれ。また、2 から 9 までの別解を考えよ。(答は後掲)

(参考)　「数のエッセイ 一松信 自然選書」から ＜フォア・フォアーズ゛＞

4 を 4 個使って(数学記号は自由に使って) 1 から 10 までつくる。(影の声:別解もつくって)

$1 = (4\times4)\div(4\times4)$　$2 = 4/4 + 4/4$　$3 = (4+4+4)\div4$　$4 = 4^{4-4}\times4$　$5 = 4^{4-4} + 4$

$6 = (4+4+4)\div\sqrt{4}$　$7 = 44/4 - 4$　$8 = 4+4+4-4$　$9 = 4+4+4/4$　$10 = (44-4)\div4$

＜記事、問題など＞

A　フェルマーの最終定理　サイモン・シン　青木薫 訳　新潮文庫

「楕円曲線論と呼ばれる分野」

― 1975年ｹﾝﾌﾞﾘｯｼﾞ大学の大学院生ｱﾝﾄﾞﾘｭｰ・ﾜｲﾙｽﾞに指導教官ｼﾞｮﾝ・ｺｰﾂが選んだテーマ

これが、ﾌｪﾙﾏｰの最終定理への重大な転機となった。この本では楕円方程式と呼ぶことに・・・

楕円曲線　$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$　a、b、c は任意の定数

(例)　$y^2 = x^3 -2$　ﾌｪﾙﾏｰは、ただ一組の整数解 (x,y) = (3,5) をもつことを証明した。

(参考：前掲　ﾌｪﾙﾏｰの難問の一例)

＜ 5 を法とする算術＞　合同式、剰余類 (5 で割った余りによる) の利用

(例)　$x^3-x^2 = y^2+y$ の 5 を法とした解 (x,y) (mod 5) の個数

x	0	1	2	3	4
x^3-x^2	0	0	4	3	3

y	0	1	2	3	4
y^2+y	0	2	1	2	0

(0,0),(0,4),(1,0),(1,4)

(本では) E 系列として、 p を法とする解の個数を E_p としており、この場合 $E_5 = 4$

無限の数でなく、E 系列によって、楕円曲線の情報のかなりの情報が含まれている。

(本では)　$E_1=1$ 、 $E_2=4$ 、 $E_3=4$ 、 $E_4=8$ 、 $E_6=16$ 、 $E_7=9$ 、 $E_8=16$ 、 ・・・

$E_1 = 1$　(0,0)

x	0
x^3-x^2	0

y	0
y^2+y	0

$E_2 = 4$　(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)

x	0	1
x^3-x^2	0	0

y	0	1
y^2+y	0	0

$E_3 = 4$　(0,0),(0,2),(1,0),(1,2)

x	0	1	2
x^3-x^2	0	0	1

y	0	1	2
y^2+y	0	2	0

$E_4 = 8$　(0,0),(0,3),(1,0),(1,3),
(2,0),(2,3),(3,1),(3,2)

x	0	1	2	3
x^3-x^2	0	0	0	2

y	0	1	2	3
y^2+y	0	2	2	0

問１　$E_6 = 16$、$E_7 = 9$、$E_8 = 16$ を確認せよ。

志村五郎と谷山豊の出会い (1954.1～) と二人を魅了したテーマ「モジュラー形式」

(本から) ・・・ﾓｼﾞｭﾗｰ形式はもっとも難解な数学的対象の一つ・・・20 世紀の数論研究者ﾏﾙﾃｨﾝ・ｱｲﾋﾗｰは、・・・数学の基礎演算は、加法、減法、乗法、除法、そしてﾓｼﾞｭﾗｰ形式の五つだというのだ。(この後、10ページほど図と説明があるが、関心があればネットで検索されたい・・・)

谷山の死 (1958.11.17) の後、志村は・・・楕円方程式(曲線) とﾓｼﾞｭﾗｰ形式の関係を理解しようとした。・・・

「谷山＝志村予想」～「谷山＝志村＝ｳﾞｪｲﾕ予想」～いろいろ(名前は全部で 15通りあるとか)

いろいろなドラマの展開あり。

ｱﾝﾄﾞﾚ・ｳﾞｪｲﾕ、ｼﾞｮﾝ・ｺｰﾂ、ﾊﾞﾘｰ・ﾒｰｻﾞ、ﾛﾊﾞｰﾄ・ﾗﾝｸﾞﾗﾝｽ、ｱﾝﾄﾞﾘｭｰ・ﾜｲﾙｽﾞ、ｹﾞﾙﾊﾙﾄ・ﾌﾗｲ、ｹﾝ・ﾘﾍﾞｯﾄ、ﾀﾞｰﾌｨｯﾄ・ﾋﾙﾍﾞﾙﾄ、ﾜｲﾙｽﾞの妻ﾅｰﾀﾞ、・・・、(19世紀の) ｴｳﾞｧﾘｽﾄ・ｶﾞﾛｱ

・・・・・・・・

（本から概略）

題　：フェルマーの最終定理の最新情報
日付：1994年10月25日、11:04:11
10月25日現在、二篇の論文が発表されている。
「モジュラー楕円曲線とフェルマーの最終定理」ｱﾝﾄﾞﾘｭｰ・ﾜｲﾙｽﾞ著
「ある種のヘッケ環の理論的性質」ﾘﾁｬｰﾄﾞ・ﾃｲﾗｰ、ｱﾝﾄﾞﾘｭｰ・ﾜｲﾙｽﾞ共著
・・・・・３ページほどの英文と、訳文・・・(略) ・・・希望の光は見えてきたようだ。
カール・ルービン　　オハイオ州立大学

＜四色問題とコンピューターの利用＞

「地図をぬり分けるには、最低何色あればよいか。四色で足りるか。

(1852.10 イギリスの日曜数学者 ﾌﾗﾝｼｽ・ｶﾞｽﾘｰが作った問題)

1976年6月、1200時間もの計算時間を費やしたﾊｰｹﾝとｱｯﾍﾟﾙは1,482の地図の解析を終え、5色以上を必要とする地図は一つもなかったと発表した。ｶﾞｽﾘｰの四色問題がついに解決されたのである。

特筆すべきは、これが、ｺﾝﾋﾟｭｰﾀｰｶが数学の証明に用いられて、・・・・・・

ﾌｪﾙﾏｰは、自分の証明はﾃﾞｨｵﾌｧﾝﾄｽの『算術』の余白には書ききれないと述べた。ﾜｲﾙｽﾞの100ページにも及ぶ充実した論文は・・・、ﾌｪﾙﾏｰの証明が、ﾜｲﾙｽﾞのそれでなかったとしたら・・・

1997年6月27日、ﾜｲﾙｽﾞは５万ドル相当のｳﾞｫﾙﾌｽｹｰﾙ賞を受け取り・・・
ﾌｪﾙﾏｰの最終定理が公式に解決されたのである。

＜追加の問題として　完全数について＞

問２　$2^{n+1}-1$ が素数ならば、$2^n(2^{n+1}-1)$ は完全数である。

＜解答、解説＞

問１　$E_6=16$、$E_7=9$、$E_8=16$ を確認せよ。

(解)　$E_6=16$

x	0	1	2	3	4	5
x^3-x^2	0	0	4	0	0	4

y	0	1	2	3	4	5
y^2+y	0	2	0	0	2	0

(0,0),(0,2),(0,3),(0,5),(1,0),(1,2),(1,3),(1,5),
(3,0),(3,2),(3,3),(3,5),(4,0),(4,2),(4,3),(4,5)

$E_7=9$

x	0	1	2	3	4	5	6
x^3-x^2	0	0	4	4	6	2	5

y	0	1	2	3	4	5	6
y^2+y	0	2	6	5	6	2	0

(0,0),(0,6),(1,0),(1,6),(4,2),(4,4),(5,1),(5,5),(6,3)

$E_8=16$

x	0	1	2	3	4	5	6	7
x^3-x^2	0	0	4	2	0	4	4	6

y	0	1	2	3	4	5	6	7
y^2+y	0	2	0	4	4	6	2	0

(0,0),(0,7),(1,0),(1,7),(4,0),(4,7),(2,3),(2,4),
(3,1),(3,6),(5,3),(5,4),(6,3),(6,4),(7,2),(7,5)　(確認をよろしく)

問２　$2^{n+1}-1$ が素数ならば、$2^n(2^{n+1}-1)$ は完全数である。

(証明)　$2^{n+1}-1$ が素数だから、その約数は 1 と $2^{n+1}-1$ だけ。
$2^n(2^{n+1}-1)$ の約数の和は、

$$1+2+2^2+\cdot\cdot+2^n+\quad(2^{n+1}-1)(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})\qquad=2^n(2^{n+1}-1)$$

(完全数については、本には他にも記述があり)

・・・この数千年間に見つかった完全数はたった 30 個に過ぎない。最近発見された完全数は、13 万桁にもなり、・・・

「すべての完全数は偶数か？」、「完全数は無限に存在するか？」、・・・

ゴールドバッハの予想「(2 以外の) すべての偶数は２つの素数の和で表せる」

(例)　4=2+2、6=3+3、8=3+5、・・・

その他、いろいろな話題、問題なども・・・

「Ⅸ-27」のｹﾞｰﾃﾞﾙの不完全性定理に続けての話題として
(BLUE BACKS　直感を裏切る数学　神永正博　から)

連続体仮説(ｶﾝﾄｰﾙ)－ 数えられる無限・加算集合（の濃度）と数えられない無限・非加算集合（の濃度）の間には（異なる濃度の）集合は何もない。

ｹﾞｰﾃﾞﾙ(1940)　　連続体仮設の否定を証明することは不可能である。
ｺｰｴﾝ　(1963)　　連続体仮説を証明することは不可能である。

(写し間違いがあるかも知れません。ネットでも検索できます。参考までに)

＜暇つぶし＞　の答

(A、Bの本の解)　A：　(5×5 + 5)÷5 － 5 = 1　　　B：　(5×5 + 5×5)÷5 = 10

(私の解)　本当に「暇つぶし？」になりました。他にもいろいろありそうで遊べます。

5 －(5 × 5 － 5)÷ 5 = 1	5 + 5 × 5 ÷ 5 ÷ 5 = 6
5 －(5 + 5 + 5)÷ 5 = 2	(5 × 5 + 5 + 5)÷ 5 = 7
5 － 5 ÷ 5 － 5 ÷ 5 = 3	5 +(5 + 5 + 5)÷ 5 = 8
5 + 5 － 5 － 5 ÷ 5 = 4	{(5 + 5)× 5)－ 5 }÷ 5 = 9
5 × 5 × 5 ÷ 5 ÷ 5 = 5	5 + 5 +(5 － 5)÷ 5 =10

＜フォア・フォアーズ＞の別解： 7、9、10 は 2 つの解にした。
［眠れないとき、頭が冴えます？？？　悩んだ答です。］

1 = 4÷4+4-4　　2 = 4×4÷(4+4)　　3 = (4×4-4)÷4　　4 = 4+(4-4)×4　　5 = (4×4+4)÷4
6 = (4+4)÷4+4　　7 = $\sqrt{}$4+4+4÷4　　8 = 4×4-(4+4)　　9 = 4÷4+4×$\sqrt{}$4　　10 = 4+4+4÷$\sqrt{}$4
($\sqrt{}$などが気になって別解を)　　7 = 4+4-$\log_4 4$　　9 = 4+4+$_4C_4$　　10 = $_4P_4$÷4+4

(参考)　$\sqrt{}$ ：$^2\sqrt{}$　の 2 が隠れているが？　　$\log_a K$ ：　K は a の何乗か？(例) $\log_2 8=3$
$_nC_k$：　n 個のものから k 個とるとり方は？(例)　$_4C_4=1$
$_nP_k$：　n 個のから k 個とって並べる並べ方は？　(例)　$_4P_4=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$