数学散歩　Ⅸ－7　　　　　　　　　　２０１８．５．α　　岐阜市　村山錞司

問題づくりの参考に　　：PART　４

「ﾓﾉｸﾞﾗﾌ新書15 演習 不能問題 久保季夫 科学新興社」(1979年11月20日第1刷発行)　(1/3)

＜まえがきーから＞旧制中学のとき、数学は不可能も証明できると聞いておどろいた。以来、不能問題に興味をもち、しろうとの余技として楽しんできたが、・・・　1979年5月

＜読後の感想など＞「不能」という単語に魅かれて、手にした本である。45の演習問題、解説、Training、関連の話題など、読み直して気づかされたことも多く、反省しきり。なお、本の解など参考にしているが、私の勝手な解釈による解などもあり、間違いもありそうです。最後の方に（演習４３　（ガウスによる））正17角形の作図問題の証明が出てきます。

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜連休中のため　おまけ　として＞

「『言葉のルーツ』 おもしろ雑学 ｴﾝｻｲｸﾛﾈｯﾄ ＰＨＰ文庫」

第６章 「数字言葉」の謎を解く (130p～147p)

面白い本に出合いました。数字にまつわる 20 の単文、添書き、1 ページ弱の説明文からなっており、つまみ食いで紹介します。

「５０歩１００歩 -------　この言葉を生んだエピソードは？」

（「漢文の授業」でやったように思いますが）・・・孟子は戦争を例にとり、「戦いの最中、戦場から逃げ出した者がいます。ある者は 50 歩走って踏みとどまり、ある者は 100 歩逃げました。前者が後者を卑怯者といったらどうでしょうか」と話した。・・・

「ピカ一 --------- どんな遊びからでた言葉？」

・・・もともとは花札からきている。・・・配られた 7 枚の札の中に、光り物が 1 枚だけあり、あとの 6 枚がカスのとき・・・

「二枚目 ------- 一枚目は、どんな顔か？」

二枚目といえば色男、三枚目はおもしろい人のことをいう。・・・一枚目には・・・もっとも人気のある看板役者が並んだ。・・・

「いちかばちか ------- どこからきた言葉？」

・・・江戸時代の博打場で生まれた言葉といわれる。・・・「丁」と「半」の文字のそれぞれ上の部分をとって・・・。もう一つの説は、「一か罰か」に由来するという。サイコロの一が出るかどうかを賭けたトバクで・・・

「八百屋 ------ ８００種類も野菜を置いてないが？」

「胸突き八丁 ------ 富士登山の最後の「八丁」めから」

「八宝菜 ------ 八種類の野菜が使ってあったっけ？」

その野菜は、余った野菜などを使ったまかない料理であり、名前などついていなかった。・・・西太后に告げると、「数々の宝を集めてつくったようにおいしい料理だから『八宝菜』と呼べばいい」・・・

「海千山千 ------ この千につく単位は？」

・・・中国には、蛇のような下等な生き物でも、海に千年、山に千年も住んでいると、やがては龍になるという・・・

「万歳 ------ いつごろからつかわれはじめた？」

・・・明治憲法を発布するにあたって、天皇陛下を、二重橋でお迎えするさい、国民が唱和するに適切な言葉はないかと・・・

「三下 ------ なぜ下っぱのことをこういう？」

・・・カブというのは、・・・合計が九に近いほど強いという博打である。・・・三より下では勝ち目がない・・・

＜問題、答など＞

問Ⅰ　（演習１　(a/b) + (c/d) は整数でない(本の問題の番号と見出し（以下、同様））

分母が異なる2つの正の既約分数の和は整数でない。すなわち、a、b、c、d は互いに素、$b \neq d$ のとき $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$ は整数でないことを証明せよ。

(本のウマイ証明の概要)

$\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = n$ （nは整数）とおく。$0<b<d$ とし b倍して $\dfrac{bc}{d} = nb - a$ (整数) ・・・①

c/d は約分できず、0<b<d だから①の左辺は約分できても分母は 1 にならない。①は矛盾。

Training 1 (各演習問題には関連の問題が付加)

a、b、c は互いに異なる自然数とする。 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ が整数になることがあるか。あればその解をすべて求め、なければその理由を示せ。

(解) $1 \leqq a < b < c$ とする。

(イ) a=1 とすると、$b \geqq 2$、$c \geqq 3$ で、 $1 < \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq 1\frac{5}{6} < 2$ 整数はない。

(ロ) a=2 とすると、$b \geqq 3$、$c \geqq 4$ で、 $1 \leqq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} < 2$

$$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 1$$

a=2、b=3 とすると $\frac{1}{c} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ $\therefore$ c = 6

a=2、$b \geqq 4$、$c > 4$ とすると $1 < \frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} < 1$ 整数はない。

(ハ) $a \geqq 3$ とすると、b、$c > 3$ で、 $0 < \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} < 1$ 整数はない。

以上から、 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6} = 1$

(参考) a、b、c、d の４個とすると、 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6} = 2$

問２ (演習４ 111…11 は平方数でない)

各位の数がすべて 1 であるような 2 桁以上の自然数 111…11 は平方数でないことを証明せよ。

(証明の概略) 111…11 = $(10a \pm 1)^2$ = $100a \pm 20a + 1$ より 10 の位の数は偶数になり 1 ではない。

Training 4

⑴ 555…55、666…66 は平方数でないことを証明せよ。
⑵ 1 を 5 個、2 を 5 個、0 を 5 個 を並べた 15 桁の整数は平方数でないことを証明せよ。

(証) ⑴ 555…55 = 5×111…11 で 111…11 は 5 の倍数でないから。
666…66 = 2×3×111…11 で 111…11 は偶数でないから。

(参考) 同様に、222…22、333…33、・・・、999…99 は平方数ではない。

⑵ 各位の数を足すと 15 で 3 の倍数だが 9 の倍数ではないから。

(復習として) 自然数 N が 3 の倍数になるための必要十分条件は、各位の数の和が 3 の倍数になることである。9 の倍数についても同様である。 (証明略)

問３ (演習７ (n+1) 人が n 個の部屋に入る)

⑴ 任意に与えられた相異なる 4 つの整数 x_0、x_1、x_2、x_3 を考える。 これらのうち 2 つの整数を選んで、その差が 3 の倍数となるようにできることを証明せよ。
⑵ n を 1 つの正の整数とする。このとき、n の倍数であり、桁の数が (n+1) を超えず、かつ 33…300…00 の形で表される整数があることを証明せよ。 (神戸大)

(参考) 「Ⅴ-12 2016.6.α」鳩の巣原理-N の数学

(証明の概略) ⑴ 3 で割れば余りは 0、1、2 の 3 通りで、4 つの整数の中には同じ余りの 2 つの数の組が 1 組はあり、その差は 3 の倍数になる。 (鳩の巣が 3 つで、鳩が 4 羽)

⑵(本の解を参考に) ⑴と同様に、3、33,333、…、333…3 (最後の数は n+1 桁) の n+1 個の数について、n で割れば余りは 0、1、2、…、n-1 の n 通りのどれかで、n+1 個の数の中には同じ余りである 2 つの数の組が少なくとも 1 組あり、その差 333…3 - 33…3 = 33…3300…00 は n の倍数で、桁数は n+1 以下。

(例) n=5 とすると、3、33=4×8+1、333=4×83+1、… 333-33 = 300 = 4×15

(Training 7 は省略)

問４ (演習１１ sin 10°、cos 10° は有理数でない)
⑴ cos 10° は有理数でないことを証明せよ。
⑵ sin 10° は有理数でないことを証明せよ。

(証) ⑴ cos 10° = a/b (有理数 (a、b は整数)) とすると、
$\cos 30^\circ = 4\cos^3 10^\circ - 3\cos 10^\circ = \sqrt{3}/2$ (無理数) で不可

⑵　$\sin 10^\circ = a/b$（a、b は互いに素な自然数）とする。

$\sin 30^\circ = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ = 3(a/b) - 4(a/b)^3 = 1/2$　より

$8a^3 - 6ab^2 + b^3 = 0$　∴ $b^3/a = 2(3b^2 - 4a^2)$

(ｲ)　$a = 1$ のとき、b は偶数だから　$b = 2n$（n は自然数）として、

$8n^3 = 24n^2 - 8$　より　$n^2(3 - n) = 1$　これを満たす自然数 n はない。

(ﾛ(　$a > 1$ のとき　a、b は互いに素な自然数だから、

b^3/a は分数、$2(3b^2 - 4a^2)$は整数で不可

(ｲ)、(ﾛ)より $\sin 10^\circ$ は有理数でない。

Training 11

⑴　$\tan 10^\circ$ は有理数でないことを証明せよ。（⑵は省略）

（証）　$\tan 30^\circ = \dfrac{\tan 10^\circ - 3\tan^3 10^\circ}{1 - 3\tan^2 10^\circ} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　より、$\tan 10^\circ$ は有理数でない。

問５　（演習１２　$\sqrt{ax^2 + bx + c}$ が有理数となる場合）

⑴　a、b の任意の有理数に対して $\sqrt{x^2 + ax + b}$ を有理数とする x の有理数は無限に存在することを証明せよ。

⑵　$\sqrt{x + 3}$、$\sqrt{x - 3}$ を共に整数とするような整数 x はあるか。また、共に有理数とするような有理数 x はあるか。

⑴　（感想として　関数のグラフを考えれば、当り前に思えるのだが如何？）

（証）本を参考に $\sqrt{x^2 + ax + b} = x + c$ とおく。　（x^2 を消すため）

$ax + b = 2cx + c^2$　、　$(2c - a)x = b - c^2$

$2c \neq a$ として　$x = \dfrac{b - c^2}{2c - a}$　より　$x + c = \dfrac{c^2 - ac + b}{2c - a}$

当然だが x を代入すると、　$\sqrt{x^2 + ax + b} = \sqrt{\left(\dfrac{c^2 - ac + b}{2c - a}\right)^2} = \left|\dfrac{c^2 - ac + b}{2c - a}\right|$

絶対値の中は a、b、c による有理数で、x も有理数になり無限にある。

⑵　（解）$\sqrt{x + 3} = a$ 、$\sqrt{x - 3} = b$ 、 $a > b \geqq 0$ とすると、

$a^2 - b^2 = 6$ 、$(a + b)(a - b) = 6 \cdot 1 = 3 \cdot 2$

$\begin{cases} a + b = 6 \\ a - b = 1 \end{cases}$ で $\begin{cases} a = 7/2 \\ b = 5/2 \end{cases}$　又は　$\begin{cases} a + b = 3 \\ a - b = 2 \end{cases}$ で $\begin{cases} a = 5/2 \\ b = 1/2 \end{cases}$　整数はない。

c を正の有理数として

$\begin{cases} a + b = 6c \\ a - b = 1/c \end{cases}$ で $\begin{cases} a = (6c + 1/c)/2 = (6c^2 + 1)/2c \\ b = (6c - 1/c)/2 = (6c^2 - 1)/2c \end{cases}$

a、b、c ともに正の有理数とでき、有理数 $x = a^2 - 3 = b^2 + 3$ は無限にある。

(Training 12 は省略)