数学散歩　Ⅸ－８　　　　　　　　　　２０１８．５．β　　岐阜市　村山鋍司

問題づくりの参考に　　：PART　４

「ﾓﾉｸﾞﾗﾌ新書15 演習 不能問題 久保季夫 科学新興社」(1979年11月20日第1刷発行)　(2/3)

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題、答など＞

問６　（演習１３　$ax + by = c$ の整数解）

⑴　等式 $28x - 49y = 100$ を成立させるような整数 x、y はないことを証明せよ。
⑵　$17x + 13y = 149$ を満たす整数の組 (x, y) を求めよ。

（略解）⑴　$28x - 49y = 7(4x - 7y) = 100$　100 は 7 の倍数ではない。

⑵　$y = \dfrac{149 - 17x}{13} = 11 - x - \dfrac{4x - 6}{13} = 11 - x - \dfrac{2(2x - 3)}{13}$

y は整数だから $2x - 3 = 13k$（k は整数）$x = \dfrac{13k + 3}{2} = 6k + 2 - \dfrac{k - 1}{2}$

x は整数だから $k - 1 = 2h$（h は整数）、$k = 2h + 1$

よって　$x = 13h + 8$、$y = -17h + 1$　$(x, y) = (13h + 8, -17h + 1)$

（別解）　１組の整数解を求める。

x	1	2	3	4	5	6	7	8
149-17x	132	115	98	81	64	47	30	13
○/13	10.15	8.846	7.538	6.231	4.923	3.615	2.308	1

$17(x-8) + 13(y-1) = 0$ より同じ答えを得る。

Training １３

⑴　$12m - 21n = 100$ には整数解がないことを証明せよ。　（琉球大）
⑵　a、b、c はどの２つも互いに素であるとき、$ax + by + cz = 1$ は整数解をもつことを示せ。

（略解）⑴　$12m - 21n = 3(4m - 7n) = 100$　100 は 3 の倍数ではない。

⑵　$z = 0$ とすれば $ax + by = 1$　整数解 $(x, y, 0)$ がある。

（参考）「V-12 2017.2.β」　a、b が互いに素のとき $ax + by = 1$ は整数解をもつ。

（私の別解）　$ap+bq=1$…①、$bs+ct=1$…②、$cu+av=1$…③ より

①+②-③で　$a(u-v)+b(q+s)+c(t-u)=1$　整数の組 $(u-v, q+s, t-u)$ がある。

問７　（演習１４　$5x^2 - 2y^2 = 1$ に整数解がない）

$5x^2 - 2y^2 = 1$ をみたす整数の組 (x, y) がないことを証明せよ。

（解）　$5x^2 = 2y^2 + 1$ より整数の組があれば x は奇数、$x = 2n - 1$

$2y^2 + 1 = 5(4n^2 - 4n + 1)$　∴　$y^2 = 2\{5n(n - 1) + 1\}$

{ } の中は奇数、右辺は平方数にならない。

（本には３通りの解が示してあるが次が面白い。）

平方数の末位の数は　1、4、9、6、5、6、9、4、1

$5x^2$ の末位の数は　5、0

$2y^2$ の末位の数は　2、8、0　で　$5x^2 - 2y^2$ =の末位の数が 1 になることはない。

Training １４

次の方程式をみたす整数の組 (x, y) はあるか。あればすべての解を求め、なければその理由を示せ。⑴　$x^2 - y^2 = 60$　⑵　$13x^2 - 5y^2 = 2$

（略解）⑴　$(\pm 16, \pm 14)$、$(\pm 8, \pm 2)$　（複号は全組合せ）

⑵　x、y は共に偶数か奇数。

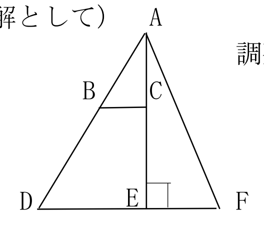
$x = 2m$、$y = 2n$ のとき　$4(13m^2 - 5n^2) = 2$、$2(13m^2 - 5n^2) = 1$　で不可

$x = 2m-1$、$y = 2n-1$ のとき　$2\{13m(m-1)-5n(n-1)\} = -3$ で、不可

問８　（演習２１　ヘロンの数）

（概要）三角形の三辺の長さが整数で、面積も整数であるものを「ヘロンの数」という。（例 (3,4,5) で面積 6 ）直角三角形や二等辺三角形でない三角形でヘロンの数になるものはあるか。

（解として）



２つのヘロンの数の直角三角形の斜辺でない辺をくっつけ、辺の長さを調整すればよい。

△ABC は (5,3,4) で面積 6 。△AFE は (13,5,12) で面積 30 。

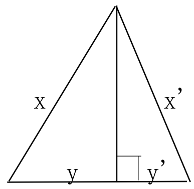
相似拡大して、△ADE は (15,9,12) で面積 54 。

２つをくっつけて

△ADF は (15,14,13) で面積 84 。

Training ２１

ヘロンの数をみつけるには、右図で $x^2 - y^2 = 1$ となる有理数を２組求めて分母の最小公倍数をかけるとよい。
この方法でヘロンの数を１組求めよ。



（例） $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 1$

$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1/2 \end{cases}$ で $\begin{cases} x = 5/4 \\ y = 3/4 \end{cases}$ ×12　(15,9,12) 面積 54

$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1/3 \end{cases}$ で $\begin{cases} x = 5/3 \\ y = 4/3 \end{cases}$ ×12　(20,16,12) 面積 96

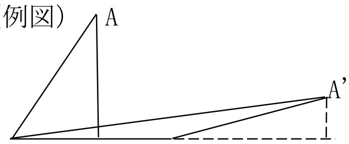
２つ合わせて
(15,25,20) 面積 150

３つとも辺の比が　３：４：５　の直角三角形。$x + y = 4$ など、別の例はどうですか。

問９　（演習３０　３角形と面積）

△ABC と△A'B'C' の３辺の長さをそれぞれ a、b、c と a'、b'、c' とする。
a＜b＜c＜a'＜b'＜c' で、しかも面積は △ABC ＞△A'B'C' となることがあるか。可能ならば１つの例をあげ、不可能ならば理由を示せ。

（例図）



△ABC :　BC = 3、CA= 4、AB = 5　面積　6

△A'B'C' :　B'C'=6、C'H=6、A'H=1、C'A'=$\sqrt{37}$、A'B'=$\sqrt{145}$
面積　3

＜△ABC、△A'B'C' ともに鋭角三角形の場合はどうか＞

a＜b＜c＜a'＜b'＜c' で、△ABC ＞△A'B'C' とすると

bc sin A＞b'c' sin A'　、 bc ＜＞b'c'　だから　sin A＞sin A'

ca sin B＞c'a' sin B'　、 ca ＜＞c'a'　だから　sin B＞sin B'

ab sin C＞a'b' sin C'　、 ab ＜＞a'b'　だから　sin C＞sin C'

鋭角三角形だから、 A＞A'、B＞B'、C＞C' で A+B+C＞A'+B'+C'　不可能である。

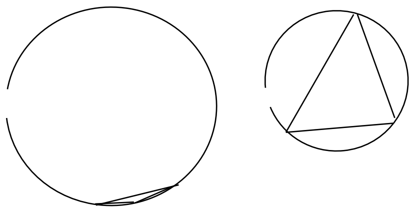
Training ３０

（演習３０　と同様に） a＜b＜c＜a'＜b'＜c' で、△ABC の外接円が△A'B'C' の外接円より大きくなることがあるか。

（解）

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$ より、

$A < B < 90^\circ < C$ で A、B → 0 、C → 180° とすれば、外接円の半径はいくらでも大きくできる。



問１０（演習３６　４面体に垂心はない）

４面体の各頂点から対面に下した垂線は一般には交わらないことを証明せよ。

（参考）　「Ⅷ-4 2017.10.β」で扱っている。

Training ３６

⑴ （略）

⑵ 　座標平面上で、△ABC の頂点の座標がみな有理数であるとき、次の点の座標が有理数となるものはどれか。

（解）　x、y が有理数である点 (x,y) を有理点とする。

重心 G　$((x_1+x_2+x_3)/3, (y_1+y_2+y_3)/3)$　有理点になる。

外心 O　各辺の垂直二等分線（有理数係数）の交点で、有理点になる。

内心 I　３頂点が　(2,0)、(-2,0)、(0,2) のとき、$(0, 2\sqrt{2}-2)$ で有理点にならない。

垂心 H　３本の垂線（有理数係数）の交点で、有理点になる。