数学散歩　Ⅸ－９　　　　　　　　　　２０１８．６．α　　岐阜市　村山錞司

問題づくりの参考に　　：PART　４

「ﾓﾉｸﾞﾗﾌ新書15 演習 不能問題 久保季夫 科学新興社」(1979年11月20日第1刷発行)　(3/3)

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題、答など＞

問１１（演習４１　正５角形は作図できる）

正５角形の１辺が中心を見込む角は 72°である。sin 72°または cos 72°の値を求め、それが作図できることから、正５角形は作図できることを示せ。ただし、ここで作図とは、定規とコンパスによるものとする。

（略解）　$360° / 5 = 72° = \alpha$ とすると $5\alpha = 360°$

$\sin 3\alpha = \sin(360° - 2\alpha) = -\sin 2\alpha$　だから　$\sin 3\alpha + \sin 2\alpha = 0$

$3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$、$\sin\alpha > 0$ だから　$4\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 0$

$\cos\alpha > 0$ より、$\cos\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

（作図）

① △OAB：　BA⊥OA、OA = 2、BA = BC = 1（c は斜辺 OB 上の点）

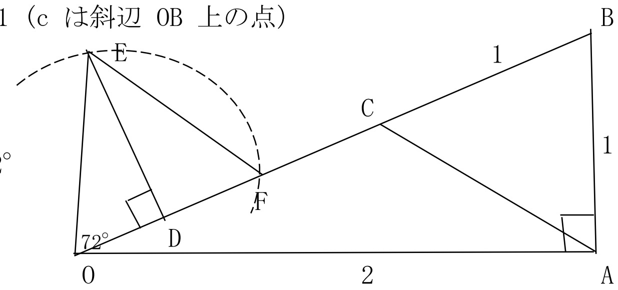
　$OB = \sqrt{5}$、$OC = \sqrt{5} - 1$

② △EOD：　$OD = OC/4 = (\sqrt{5} - 1)/4$

　（点 D は線分 OC の４等分点）

　ED⊥OD、OE = AB = 1 で ∠EOD = 72°

③ 点 O 中心、半径 OE = 1 の円 O と OC の交点を F とすると、EF を１辺とする円 O に内接する正５角形が作図できる。



Training ４１

正５角形ABCDE の対角線AC、BD の交点を F とする。△ABC ∽△BFC

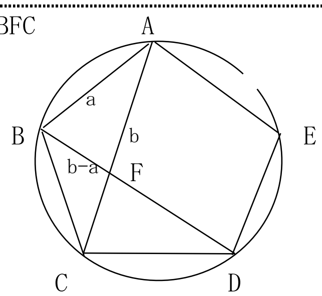
∴ AB/AC = BF/BC　この等式を AB = a、AC = b で表し、定規とコンパスで△ABC が作図可能であることから、正５角形が作図可能であることを示せ。

（解）AB=BC=CD=DE=EA = a、AC=BD = b、BF=FC = b − a

AB・BC = AC・BF より、$a^2 = b(b - a)$、

$b^2 - ab - a^2 = 0$

$b > a > 0$ より　$b = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a$　　作図可能



（参考）　$b/a = (\sqrt{5}+1)/2$ は黄金比（「数学散歩 寄り道-6 2017.11.?」、ﾌｨﾎﾞﾅｯﾁ数列）

問１２（演習４２　正７角形は作図できない）

整数係数の３次方程式が、(１次式)(２次式) = 0 に変形できないときは、その３次方程式の解は定規とコンパスで作図できないことがわかっている。

正７角形は定規とコンパスで作図できないことを示せ。

（略解）　$7\alpha = 360°$ とする。$\sin 4\alpha = -\sin 3\alpha$ だから

$4\sin\alpha\cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) = -\sin\alpha(3 - 4\sin^2\alpha)$

$\sin\alpha > 0$ だから　$8\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha - 1 = 0$

$2\cos\alpha = t$ として $t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$。分解できるとして $(t + a)(t^2 + bt + c) = 0$

　$a + b = 1$、$ab + c = -2$、$ac = -1$ これをみたす整数 a、b、c はない。作図不能。

Training ４２

（演習４２と同様に仮定して）

⑴　正９角形は作図不能であることを示せ。

⑵　60°の角を３等分することは可能であるか。

（解）⑴　$9\alpha = 360°$、$3\alpha = 120°$、$\cos 3\alpha = -1/2$ より、$8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha + 1 = 0$

　$2\cos\alpha = t$ として、$t^3 - 3t + 1 = 0$ 問１２と同様にして、作図不能。

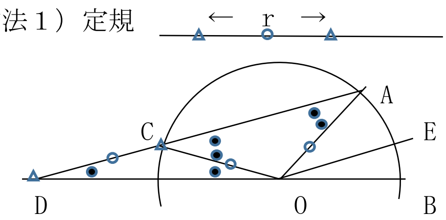
⑵　⑴と同様で作図不能。

＜追加として＞本にはないが「一般の角の３等分の作図」の２通りの方法について

（参考　「Ⅳ−１ 2015.12.α」をまとめ直してみた。

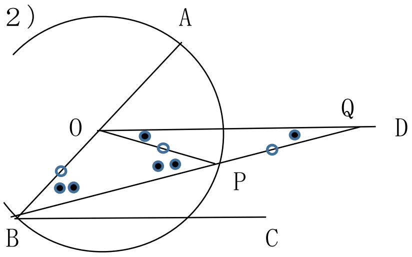
条件として「定規とコンパス」に追加して「定規の２箇所に印をつけておく」

（方法１）定規



（∠AOB を３等分する）　① 点 O を中心で半径 r
（OA = OB = r 定規の２箇所間の長さ）の円を描く。
②　定規を、点A と円周上の点C とOB 上の点D を通り CD = r となるように配置する。
③　OE // DA となるような直線OE は∠AOB の３等分線になる。

（方法２）



（∠ABC を３等分する）
① AB（AO = BO = r）を直径とする円 O を描き、BC に平行に直線OD を引く。
②　定規を、点B と円周上の点P とOD 上の点Q を通り PQ = r となるように配置する。
③　直線BP(Q) は∠ABC の３等分線になる。

問１３（演習４３　正１７角形は作図できる）

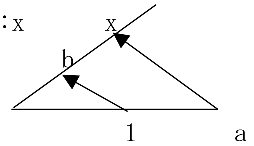
線分について、加減乗除と平方根の組合せによる線分は、定規とコンパスで作図できる。 正１７角形は作図できることを示せ。

（解説）　（その前に気になったこととして２点）

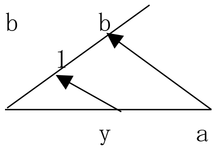
①　（単位として）１の長さの線分が必要である。
②　与えられた直線に平行で、与えられた点を通る直線を、コンパスと定規で引けるか？

与えられた２つの線分の長さ a、b について ⑴ $x = ab$ 、⑵ $y = a/b$ 、⑶ $z = \sqrt{a}$ を作図する。　⑴ $x = ab$　⑵ $y = a/b$　⑶ $z = \sqrt{a}$

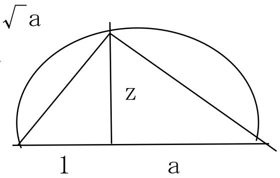
1:a=b:x



y:a=1:b



1:z=z:a



＜私からの問題＞　⑷　$\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ の作図　（⑶の操作を２回行えばよい。図略）
（Ｅｘｃｅｌでやりくりして√の屋根 ＿＿ を描いており、ズレがありますがよろしく。）

【ガウスの発見】　正１７角形が定規とコンパスで作図可能であることは、ガウスによって発見された(1796年）。次式はガウスによる式である。

$$（A）\quad \cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{2(17-\sqrt{17})}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{2(17-\sqrt{17})}-2\sqrt{2(17+\sqrt{17})}}\right)$$

（感想として）本を参考にまとめてみた。各式の組合せの不思議さを感じさせられた。できれば、紙と鉛筆と消しゴムで追試されたい。式変形の妙が味わえると思います。

（証明）　正１７角形の中心角をαとすると、17α=360°（α≒21.2°）

$16\alpha=360^\circ-\alpha$　∴ $\sin 16\alpha = -\sin\alpha$　$(\sin\alpha>0)$

$\sin 16\alpha = \cdots = 16\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha = -\sin\alpha$

$\sin\alpha>0$ より　$16\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha = -1$

＜目標＞　cos α を求める。（（A））

（関係式）　$\cos(A+B)+\cos(A-B) = 2\cos A\cos B$ 、$\cos A\cos B = \{\cos(A+B)+\cos(A-B)\}/2$
$\cos n\alpha = \cos(17-n)\alpha$　などを利用　（$\alpha = 2\pi/17$）

$16\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha = 4(\cos 3\alpha+\cos\alpha)(\cos 12\alpha+\cos 4\alpha)$　（$\cos 12\alpha = \cos 5\alpha$）
$= \cdots$
$= 2(\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cos 4\alpha+\mathrm{c0s}\ 5\alpha+\cos 6\alpha+\cos 7\alpha+\cos 8\alpha) = -1$　より

（B）　$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cos 4\alpha+\cos 5\alpha+\cos 6\alpha+\cos 7\alpha+\cos 8\alpha = -1/2$

$$\begin{cases}\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 8\alpha = x & (x>0)\\ \cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 6\alpha+\cos 7\alpha = y & (y<0)\end{cases}$$ とおく。　この組み合わせでないとうまくいかないと思われる。

（B）より、$x+y=-1/2$

また、（B）を求めたときと同様にして、

$xy = \cdots = 4(\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cos 4\alpha+\cos 5\alpha+\cos 6\alpha+\cos 7\alpha+\cos 8\alpha)/2 = -1$

よって、x、y を２根とする２次方程式は $2t^2+t-2=0$ で $t = (-1\pm\sqrt{17})/4$

$x>0$、$y<0$ より　$x = (-1+\sqrt{17})/4$　、　$y = (-1-\sqrt{17})/4$

$$
\text{(C)}\quad \begin{cases} \cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 8\alpha = (-1+\sqrt{17})/4 \\ \cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 6\alpha+\cos 7\alpha = (-1-\sqrt{17})/4 \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} \cos\alpha+\cos 4\alpha = x_1 \ (x_1>0) \\ \cos 2\alpha+\cos 8\alpha = x_2 \ (x_2<0) \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos 3\alpha+\cos 5\alpha = y_1 \ (y_1>0) \\ \cos 6\alpha+\cos 7\alpha = y_2 \ (y_2<0) \end{cases}
$$

（C）のときと同様にして、

$$
x_1+x_2 = (-1+\sqrt{17})/4 \qquad y_1+y_2 = (-1-\sqrt{17})/4
$$

$$
x_1x_2 = -1/4 \qquad y_1y_2 = -1/4
$$

$4T^2-(-1+\sqrt{17})T-1=0$ で　　　　$4S^2-(-1-\sqrt{17})S-1=0$ で

$$
T = \frac{-1+\sqrt{17}\pm\sqrt{2(17-\sqrt{17})}}{8} \qquad S = \frac{-1-\sqrt{17}\pm\sqrt{2(17+\sqrt{17})}}{8}
$$

$$
\left.\begin{aligned} &\cos\alpha+\cos 4\alpha = x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{2(17-\sqrt{17})}}{8} \\ &\cos\alpha\cdot\cos 4\alpha = y_1/2 = \frac{\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}{2} = \frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{2(17+\sqrt{17})}}{16} \end{aligned}\right\} *
$$

（本では）　＊ より $\cos\alpha$ の値が得られるが、加減乗除と平方根の組合せであるから作図できる。（注）　・・・要するに２次方程式を４回解くのであるから、平方根までの計算で作図できるということである。（で終わっているが、この後の楽しい式変形を続けることにする。）

$\cos\alpha$、$\cos 4\alpha$ を２根とする２次方程式は、

$$
16U^2 - -2(-1+\sqrt{17}+\sqrt{2(17-\sqrt{17})})U + (-1-\sqrt{17}+\sqrt{2(17+\sqrt{17})}) = 0
$$

$$
D' = 68+12\sqrt{17} -2\cdot 8\sqrt{2(17+\sqrt{17})} - \underline{(\sqrt{17}-1)\sqrt{2(17-\sqrt{17})}}\}
$$

$$
\{\ \}\text{の中} = 8\sqrt{2(17+\sqrt{17})} - \underline{(\sqrt{17}+1)\sqrt{2(17-\sqrt{17})}} + \underline{2\sqrt{2(17-\sqrt{17})}}
$$

$$
= 2\sqrt{2(17-\sqrt{17})} + 8\sqrt{2(17+\sqrt{17})} - \underline{\underline{4\sqrt{2(17+\sqrt{17})}}}
$$

$$
<\because\ (\sqrt{17}+1)\sqrt{2(17-\sqrt{17})} = \sqrt{2(\sqrt{17}+1)^2(17-\sqrt{17})} = 4\sqrt{2(17+\sqrt{17})}\ >
$$

$$
= 2\sqrt{2(17-\sqrt{17})} + 4\sqrt{2(17+\sqrt{17})}
$$

$$
D' = 4(17+3\sqrt{17}) -2\{2\sqrt{2(17-\sqrt{17})} + 4\sqrt{2(17+\sqrt{17})}\}
$$

２根は $\cos\alpha>0$、$\cos 4\alpha<0$ だから、次のガウスの（A）を得る。

$$
\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16}\Bigl(-1+\sqrt{17}+\sqrt{2(17-\sqrt{17})} +2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{2(17-\sqrt{17})}-2\sqrt{2(17+\sqrt{17})}}\Bigr)
$$

（参考）　$\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$ だから、

$$
\sqrt{2(17-\sqrt{17})} + 2\sqrt{2(17+\sqrt{17})} = \sqrt{170+8\sqrt{17}}
$$

（確認されたい。）　より、

$$
\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16}\Bigl(-1+\sqrt{17}+\sqrt{2(17-\sqrt{17})} +2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+8\sqrt{17}}}\Bigr)
$$