数学散歩　Ⅸ－特別参加 Part2　　２０１９．３．　特２　岐阜市　村山錞司

【問題作成のヒントに】

「数学 BEST 100 高校数学の知識なしでも解ける　歴史的良問を厳選！ 難問
小野田博一　(2015年3月12日 第1版 第1刷発行)　PHP

大袈裟なタイトルとビックリした問題や解答など多々あり。Q1～Q100 の問題から、気になったものを幾つか紹介します。

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

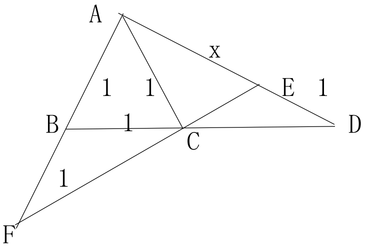
Q 5 「デロスの問題」（紀元前５世紀）
2 の立方根（の長さの線分）を作図せよ。（$\sqrt[3]{2}$ のこと）
この問題は目盛り付き定規とコンパスだけで作図できます。

(本から：古代の有名難問の１つです。・・・少なくとも１ケ月は考え抜きましょう。１ケ月以内に自力で解けたら、あなたは大天才でしょう。) ----　　(私は一晩であきらめました。)

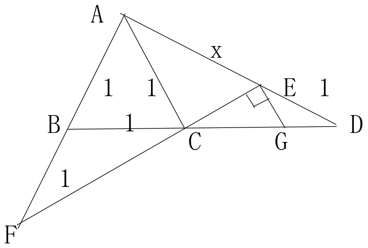
(図参照)

△ABC は辺の長さが 1 の正三角形、△ACF は∠C = 直角 の直角三角形。BC 上に点D を DE = 1 となるように AD を引けば

AE = $x = \sqrt[3]{2}$ となる。



Q 6 「デロスの問題」（その２）
$x = \sqrt[3]{2}$ を導くことができますか。



(略解)　AC∥EG となる点G を辺CD 上にとる。

∠GEC = ∠ACF = 90°、∠ECG = ∠BCF = ∠BFC = 30°、

DE:DA = EG:AC より、$1:(1+x) = EG:1$ 、$EG = 1/(1+x)$ 、

$EC = \sqrt{3}\cdot EG = \sqrt{3}/(1+x)$ 、△ACE は直角三角形だから、

$x^2 = 1 + \{\sqrt{3}/(1+x)\}^2$　より　$(x^2-1)(x+1)^2 = 3$

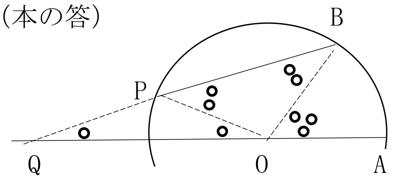
・・・　$(x+2)(x^3-2) = 0$

$x > 0$ だから　$x^3 = 2$　　$x = AE = \sqrt[3]{2}$

Q 8 「角の三等分」これは古代ギリシャの３大難問・・・の一つです。目盛りのある定規とコンパスで作図可能です。（本から：本問は少なくとも１時間は考えてみましょう。）

（参考：「数学散歩　Ⅳ-1 2015.12.β」　で扱っています。）

（本の答）



∠AOB を三等分する。

O を中心、OA = OB を半径とする円をかく。

点B を通る直線で、、円周上の点P と、直線OA 上の点Q を通り、PQ = OP となるように定規を使って引く。

∠AOB = 3∠PQO 、点O からOP に平行に線を引けばよい。

・「Ⅳ-1」の解は、円の位置を上下逆にしている。

・与えられた角が鈍角の場合はどうしたら・・・？　(半分にして作図し、２倍すればよい。)

Q56 「ボンベッリの連分数」 記録に残っている最古の無限連分数です。(1572年)
$\sqrt{13}$ = ？ これを導くことができますか。

(連分数は、過去に「数学散歩」で扱ったこともあり、復習（？）です。)

(復習)　$(\sqrt{13}-3)(\sqrt{13}+3) = 4$　より　$\sqrt{13}-3 = 4/(\sqrt{13}+3)$　　$\sqrt{13} = 3 + 4/(\sqrt{13}+3)$

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{3+\sqrt{13}} = 3 + \cfrac{4}{3 + 3 + \cfrac{4}{3+\sqrt{13}}} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{3+\sqrt{13}}}$$

($\sqrt{}$13 は、$\sqrt{13}$の屋根　の略)

$$= \cdots = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cdots}}}$$

Q57 「カタルディの連分数」
正則連分数、単純連分数：分子が１の連分数

(解)

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2^{\circ}}{8^{\circ} + \cfrac{2^{\circ}}{8 + \cfrac{2^{\diamond}}{8^{\diamond} + \cfrac{2^{\diamond}}{8\cdots}}}} \Rightarrow 4 + \cfrac{1^{\circ}}{4^{\circ} + \cfrac{1^{\circ}}{8 + \cfrac{1^{\diamond}}{4^{\diamond} + \cfrac{1^{\diamond}}{8\cdots}}}}$$

○
◇ それぞれ約分

正則連分数の表記：$\sqrt{18} = [4;4,8,4,8\cdots]$ さらに $[4;\overline{4,8}]$ (周期2) とも

Q59 「$\sqrt{7}$ を正則連分数で」

(見ないで、挑戦されては・・・)

(本より)　$(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)=3$　より　$\sqrt{7}-2=3/(\sqrt{7}+2)$　$\sqrt{7}=2+3/(\sqrt{7}+2)$

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{3}{\sqrt{7}+2} = 2 + \frac{1}{(\sqrt{7}+2)/3}$$

$$\frac{\sqrt{7}+2}{3} = 1 + \frac{\sqrt{7}-1}{3} = 1 + \frac{2}{\sqrt{7}+1} = 1 + \frac{1}{(\sqrt{7}+1)/2}$$

$$\frac{\sqrt{7}+1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{7}-1}{2} = 1 + \frac{3}{\sqrt{7}+1} = 1 + \frac{1}{(\sqrt{7}+1)/3}$$

$$\frac{\sqrt{7}+1}{3} = 1 + \frac{\sqrt{7}-2}{3} = 1 + \frac{1}{\sqrt{7}+2}$$

$$\sqrt{7}+2 = 4 + \sqrt{7}-2 = 4 + \frac{3}{\sqrt{7}+2} = 4 + \frac{1}{(\sqrt{7}+2)/3}$$

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{7}+2}{3}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(\sqrt{7}+1)/2}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(\sqrt{7}+1)/3}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sqrt{7}+2}}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{(\sqrt{7}+2)/3}}}}} = \cdots$$

$\sqrt{2}=1.222\cdots$、$\sqrt{3}=1.1212\cdots$

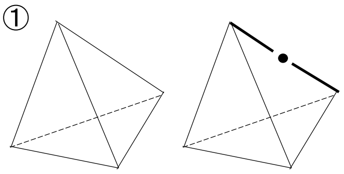
$\sqrt{7} = [2;\overline{1,1,1,4}]$ (周期4)
(感想：点検をよろしく。)
(演習) $\sqrt{2}$ 、$\sqrt{3}$ については？

Q 94　「オイラーの多面体公式」
凸多面体の頂点の数を V 、辺の数を E 、面の数を F とすると、V − E + F = 2 が成り立つ。

随分、昔のことで、どんな証明だったか・・・、次の証明には感心しました。

(本の証明の概要)　(V (Vertex、頂点)、E (Edge、縁、辺)、F (Face、面) だと思いますが？)

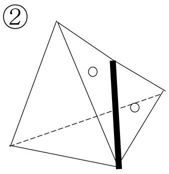
①



四面体 (三角錐) においては、(V,E,F) = (4,6,4) だから
V − E + F = 2　　が成立。

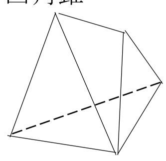
①　一つの辺上に頂点をつけ、辺を分割すると、
V は +1、E も +1 で
差し引き 0　　　　(v,E,F) = (5,7,4)

②

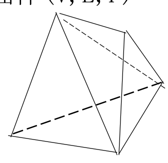


一つの線分が、一つの面を分けると
E は +1、F も +1 で
差し引き 0
(v,E,F) = (5,8,5)

⇒　四角錐



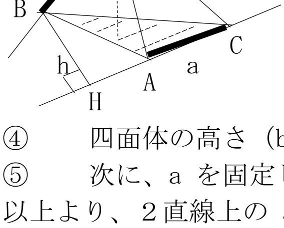
⇒　六面体(v,E,F) = (5,9,6)



③　①、②　より、差し引き 0 で　V − E + F = 2　(帰納法で・・？)

Q 96　「シュタイナーの定理」：３次元空間で２直線がねじれの位置にあり、それぞれの直線上に決まった長さの線分を一本ずつとるとき、２つの線分の両端を結んでできる四面体の体積は、線分の位置によらず一定である。これを証明できますか。　(ﾔｺﾌﾞ・ｼｭﾀｲﾅｰ　1796～1863)

(本の証明の概要)



①　ねじれの位置にある２本の直線上にある２つの線分 (そのものと長さ) を a、b とする。

②　b を固定し、その一端 (B) と線分 a がつくる△ABC を含む水平面(ABC)と、b の他端(D) とによる四面体ABCD を考える。

③　点 B から a を含む直線に下した垂線(BH) の長さを h とすると、線分 a がどこにあっても四面体の底面、△ABC の面積は ah/2 で不変 (一定) 。

④　四面体の高さ (b の他端(D)から水平面への距離) は変わらないから四面体の体積は不変。

⑤　次に、a を固定し、b を動かしても、同様に体積は一定。

以上より、２直線上の a、b の位置にかかわらず体積は変わらず一定。