数学散歩　Ⅸ－特別参加　　　　　２０１９．２．　特　　岐阜市　村山錞司

【問題作成のヒントに】

「数学的に考える 問題発見と分析の技法
キース・?デブリン 訳−冨永星(2018.12.10 第1刷発行) ちくま学芸文庫」

書名と幾つかの練習問題が気になり、手にとってみた本である。「はじめに」に続く「この本について」の一文から、・・・この本には練習問題がたくさん載っているが・・・自力で解くことを強くお勧めする。・・・ただし教科書と違って問題の答が載っていないが・・・狙いのあってのことだ。（この後、いろいろあり）　目についた記事、問題などを紹介する。できれば、直接、本にあたられることを薦めたい。（下線は私が付加）

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

第２章　言葉を厳密に使う　　２．１　数学的な言明

＜記事、問題など＞

男はオペラグラスを手に座っている女を見た．→ オペラグラスを手にしているのは男か女か？
３年前に賃借した名画を紛失.　　　　　（他に３つの単文あり。）

練習問題　２．１．１　（８問あり）　（問題文を改変したものあり。以後、同様）

1　$P_1$、$P_2$、$P_3$、・・・、$P_n$、・ がすべて素数であるときに、$N = (P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdots P_n) + 1$ が必ずしも素数にならないことを示すにはどうすればよいか。

2　前掲の「・・・オペラグラス・・・」について、オペラグラスを男が持っている場合と、女が持っている場合の二通りの文をつくれ。

3　「３年前・・・」についても同様につくれ。

6　英語の公式の文書には、一番下に次のような文が書かれ空白のページがあることが多い。This page intentionally left blank.（このページはわざと空白にしてある。）この文が述べていることは真か。・・・しかし数学では、・・・これに似た文を定式化したために、・・・数学のある分野全体を含む深刻な革命が起きることとなった。・・・

（いずれの問題も、私の改変で妙に変な問になってしまいました。（感想）訳文の微妙なアヤが）

＜私の答など＞　答の正誤は？

1　反例を１つあげればよい。（反例として）$3 + 1 = 4$、$3\times5 + 1 = 16$ など

2　男は、オペラグラスを手にして座っている女を見た.
男はオペラグラスを手にして、座っている女を見た.　（「、」をつけてみたが、どうですか。）

3　３年前に名画を賃借したが、その後、紛失した.
名画を賃借したが、３年前に紛失した.　　（日本語の表現は微妙です。）

6　この「数学散歩」でも過去に紹介したと思いますが、・・・近所のハツ梅公園のトイレの壁に「この壁には貼紙をしないでください 岐阜市」との警告の貼紙あり。その後なぜか撤去された。・・・　と同類と思いますが？　また、深刻な革命とは何か気になりました。

＜記事、問題など＞

◦　「素数は無限に存在する」というユークリッドの証明の独創的な二つの着想

①　$P_1$、$P_2$、・・・、$P_n$、・・・ というように素数をどこまでも数え上げられることを示す手段をとったこと

②　$(P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdots\cdots P_n) + 1$　という数に着目したこと（天才の一撃といえる）

◦　定理　$r^s$ が有理数になるような r 、s が存在する。（参考「数学散歩 寄り道 2017.5.χ」再掲）

①　$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数なら、$r = s = \sqrt{2}$ とすればよい。

②　$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が無理数なら、$r = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 、$s = \sqrt{2}$ とすれば、　$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$

（本から）・・・今の証明ではどちらで成り立っているかは不明だ、という点に注意しよう。
場合分けの証明の例・・・

練習問題　３．５．２　（４問あり）

2　次を帰納法で証明せよ。
(a)　$4^n - 1$ は 3 で割り切れる。　（ 本の 4n−1 は間違い？）
(b)　$n \geqq 5$ であるすべての n について、　$(n + 1)! > 2^{n+3}$　が成り立つ。

4　（問題を改変して）　$1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$　を何通りかの方法で証明せよ。

（略証）２(a)　$4^n-1 = 3k$ とすると、　$4^{n+1}-1 = (3k+1)\cdot 4-1 = 3\cdot(4k+1)$

(b)　$(n+1)! > 2^{n+3}$　のとき $\{(n+1)+1\}! > (n+2)\cdot(n+1)! > (n+2)\cdot 2^{n+3} > 2^{(n+1)+3}$

４（方法１） （数学的帰納法による） $1+2+3+\cdots+k+(k+1) = k(k+1)/2+(k+1) = (k+1)(k+2)/2$

（方法２） $1+2+3+\cdots+n = N$

+) $n+\cdots+3+2+1 = N$

$(n+1)\cdot n = 2N$ より、 $N = n(n+1)/2$

（幼いころのガウスの着想とのこと。等差数列の和の公式）

（方法３） 式変形（２通り） (ｲ) $(k+1)^2-k^2=2k+1$ (ﾛ) $\{k(k+1)-(k-1)k\} = 2k$

$k = 1,2,3,\cdots,n$ として

(ｲ)
$$\begin{aligned} 2^2 - 1^2 &= 2+1 \\ 3^2 - 2^2 &= 4+1 \\ &\cdots \\ +)\ (n+1)^2 - n^2 &= 2n+1 \\ \hline (n+1)^2 - 1^2 &= 2N+n \end{aligned}$$

$n^2 + n = 2N$ $\therefore\ N = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(ﾛ)
$$\begin{aligned} 1\cdot 2 - 0\cdot 1 &= 2 \\ 2\cdot 3 - 1\cdot 2 &= 4 \\ &\cdots \\ +)\ n(n+1)-(n-1)n &= 2n \\ \hline n(n+1) &= 2N \end{aligned}$$

$\therefore\ N = \dfrac{n(n+1)}{2}$

---

＜追加の話題＞

「教科書では教えてくれない！本当に使える数学（基礎編） 芳沢光雄 実業の日本社」

気になるテーマが出ていましたので、追加して紹介します。

「素数は無限個ある。」 （ｻｲﾀﾞｯｸによる証明）

ﾕｰｸﾘｯﾄﾞ（紀元前 300 年頃）の証明 ⇒ ｻｲﾀﾞｯｸによる証明 (2006 年)

（注：「サイダック」をｲﾝﾀｰﾈｯﾄで検索したら、いろいろ出てきました。参考になれば）

◦ 2 以上の自然数 m について、m と m+1 は互いに素である。（準備として）

（略証）m とm+1 が 2 以上の公約数 a をもつとすると、m = ab、m+1 = ac となる自然数 b と c ( b<c ) がある。∴ $1 = ac-ab = a(c-b) \geqq a \geqq 2$  $1 \geqq 2$ となって矛盾

定理 素数は無限個ある。

（証明）① n を 2 以上の自然数とすると、n を割る素数 $p_1$ がある。n と n+1 は互いに素だから n+1 を割る素数 $p_2$ は n を割る素数 $p_1$ とは異なる。② $n(n+1)$ と $n(n+1)+1$ は互いに素だから、$n(n+1)+1$ を割る素数 $p_3$ は n 、n+1 を割る素数 $p_1$、$p_2$ とは異なる。③ $\{n(n+1)\}\{n(n+1)+1\}$ と $\{n(n+1)\}\{n(n+1)+1\}+1$ は互いに素だから、後者を割る素数$p_4$ は $p_1$、$p_2$、$p_3$ とは異なる。
以下、同様に続けられ、素数は無限個存在する。（参考「数学散歩 寄り道 2017.5. χ」再掲）

3 桁同士の掛け算を教えないのはケシカラン！

（ 2 桁同士と 3 桁同士の掛け算は根本的に違う。） ２題を手計算でやってみてください。

$$\begin{array}{r} 5\ 7 \\ \times\ 8\ 9 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\ 5\ 7 \\ \times\ 7\ 8\ 9 \\ \hline \end{array}$$

2002 年の学習指導要領の改訂で、算数の掛け算の指導は 2 桁同士だけになってしまった。・・・

πと 3 と 3.14 との関係 → 円周率は約 3 として計算してよいこととなった。

電卓など使わないで、久し振りに手計算でやってみられた感想はいかがですか。 ( 5073 と 281673 )

---

＜追加＋追加の話題＞ 関連して「暗算」について

「脳を鍛える！ 計算トレーニング 小杉拓也 平凡社新書」

◎ ２桁以下同士の掛け算を暗算でする方法を解説している。－－その概略を紹介する。
（判読と、できれば、その証明をよろしく。）

おみやげ算
23 × 23
← 3
26 20
$26\times 20 + 3^2 = 529$

超おみやげ算
19 × 18
← 8
27 10
27×10 ＋ 9×8 ＝ 342

超おみやげ算(応用)
84 × 81
← 1
85 80
85×80 ＋ 4×1 ＝ 6804

2桁×1桁、1桁×2桁は分配法則で
52×6 ＝ 300 ＋ 12 ＝ 312
7×95 ＝ 630 ＋ 35 ＝ 665

２本曲線法
73 × 89
70×80 ＝ 5600
(7×9+3×8)×10 ＝ 870
3×9 ＝ 27
5600+870+27 ＝ 6497

練習
⑴ 39×31
⑵ 36×14
⑶ 62×73

（練習の答）
⑴ 1209 ⑵ 504 ⑶ 4526

◎ カプレラ数「６１７４」（インターネットで検索しても出てきます。）

（方法） ① 1111 の倍数でない４桁の数を選ぶ。（例 2047 ）
② ４個の数を並べ替えて、最大の数から最小の数を引く。(例 7420-0247=7173)
③ 繰り返す。 7731-1377=6354 → 6543-3456=3087 → 8730-378=8352 → 8532-2358=**6174** → **7641-1467=6174** （繰返し）

どの４桁の数でも最終的に「６１７４」になります。

問 ３桁、２桁ではどうなりますか。

（証明など楽しめます。３桁は「４９５」、２桁はない。）