

「四色問題 どう解かれ何をもちたのか 一松信 BLUE BACKS」中央 BC415. 7t

最初の第1章だけで頭が錯乱し、その後も一応流し読みしましたが、??? 第1章ですが、記事をつまみ食いのメモで紹介します。関心をもたれたら、直接、本を読まれるよう期待しています。感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

(24p) <局所定理> 1840年頃、モービウスが幾何学の講義の演習問題として出題

「平面上で互いに共通な線境界をもつ五カ国はありえない」

(本によれば・・・これは四色問題とはそれほど関係のない定理であり、オイラーの定理によって容易に証明される。・・・)

(25p) <相隣る国とは> 二つの国が国境線に沿って境を接しているものとする。

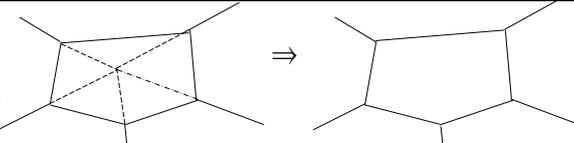
(26p) <正規地図> 一点に会するのは最大三カ国までとなっている地図を正規地図という。

(27p) <四色問題>

「平面を有限個の連結領域(国)に分ける。このとき、つねに各連結領域に四つの記号(例えば 0, 1, 2, 3)の一つをわりあてて、線で相隣り合っている二つの領域には、必ず違う記号がわりあてられるようにできるか?」 (正規地図のみを考えるとする)

(28p) 図1.7 頂点の三枝化

四カ国以上が一点に会している場合、一点のまわりに小さい国を新設して修正

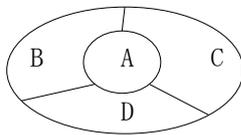


(30p) 練習問題です。四色を使用してうまくこの地図を塗り分けてください。

(比較的やさしい (本の表現のまま)) (残念ながら、図略)

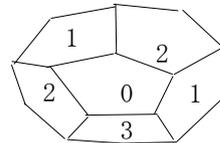
(31p) 図1.10

四色は必要



(33p) 図1.12

三色では  
すまない場合



(36p) <双対(そうつい)グラフ>

平面幾何学で、点と線(直線)を交換し、必要な言葉を修正して、

「二点を通る直線」 $\leftrightarrow$ 「二直線の交わる点」

一般的に、正しい定理から点と直線を交換して得られる定理もまた正しい: 「双対原理」

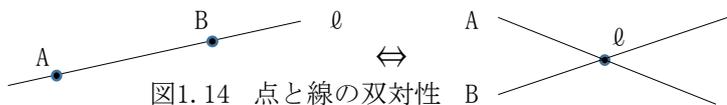


図1.14 点と線の双対性

同様に三次元射影幾何学においては、点と面(平面)を交換し、線は線として双対原理が成り立つ。

・・・双対グラフとは、・・・地図での面(領域)を点におきかえて得られる図形である。・・・

(37p) <四色問題のいいかえ>

「平面上の点と、それらを与えられた点以外では交わらない線で結んだ平面グラフを与えられたとする。その各頂点に四つの記号(たとえば 0, 1, 2, 3)のいずれか一つずつをつけ、結ばれている点同士につく記号が相異なるようにできるか?」

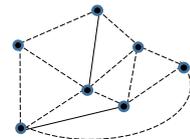
(38p) <三角形分割>

双対グラフを作って四角形以上ができたら対角線を加えて三角形に・・・

すべて囲まれる図形は三角形をなすものとする。

図1.16

余分な線を  
追加して  
三角形化



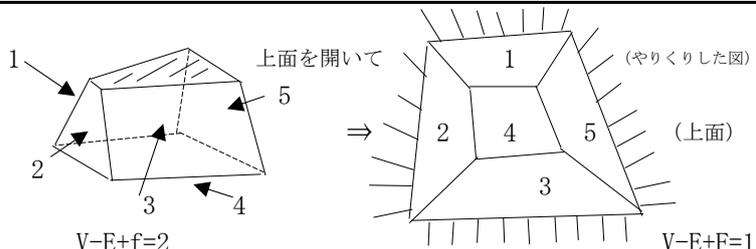
(40p) <オイラーの定理>

「凸多面体の頂点、辺、面の個数を V, E, F とすると、つねに等式  $V + F = E + 2$  が成立する。」

( $V - E + F = 2$  と同じ。

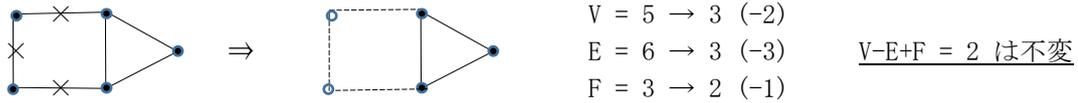
また、平面図形の場合、凸多面体の一つの面を払って平面図形の外側にした、と考えれば面の数が一つ減り  $V + F = E + 1$ )

V: 頂点の数, E: 辺の数, F: 面の数



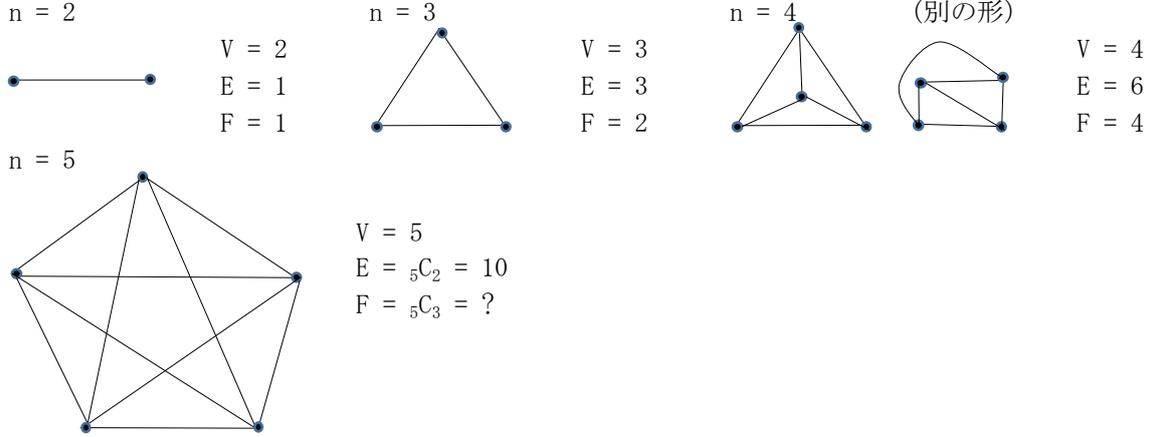
(44p) <オイラーの定理 (平面図形の場合 (外側を一つの面として)  $V+F = E+2$  ( $V-E+F = 2$ ) の証明>

図1.22 グラフをこわしてオイラーの定理を証明する。(概要)



(参考 「IX-特別参加 PART2 2019.3」)

(46p) <完全 n 点グラフ : n 点のすべての対を結んだグラフ>



(47p) <局所定理とは> 「完全五点グラフが (余分の交点なしに) 平面グラフとして表現できない」  
<局所定理の証明>

局所定理 「平面上で互いに共通な線境界をもつ五カ国はありえない」 (再掲)

(証明: 私の勝手な解釈による?)

(1) 互いに接する (隣の) 五カ国は、双対グラフを作れば五点とそれらのすべてを結ぶ 10 本の枝からなるグラフになる。

(2)  $V = 5$ 、 $E = 10$ 、各面が三角形として、 $F$  は  ${}_5C_3 = 10$  以上  $V - E + F = ?$

(本より別証)

(別証1)  $V - E + F = 2$  より、 $F = E - V + 2 = 10 - 5 + 2 = 7$  (面の数)

とすると、辺の数は三角形以上で各辺でダブルカウントで  $7 \times 3/2 = 10.5$  10 本より大  
辺の数は 10 本だから矛盾。

(別証2)  $V = 5$  だから各面は三、四、五角形のどれかで、個数をそれぞれ  $P_3$ 、 $P_4$ 、 $P_5$

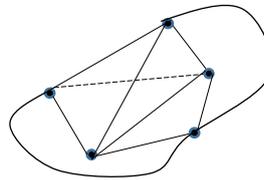
とすると、(面の数)  $P_3 + P_4 + P_5 = F = 7$

(辺の数)  $3P_3 + 4P_4 + 5P_5 = 2 \times 10 = 20$  (ダブルで)

(辺の数) -  $3 \times$  (面の数) =  $P_4 + 2P_5 = -1$  で矛盾

(48p) 図1.24

最後の一本 (図の点線部分) が引けない



《ヒマツブシの質問》

迷ったことはありませんか? 『平仮名の使用文字』: 「は」と「わ」、「じ」と「ぢ」・・・

- ・ 「5 + 2 は 7」と「5 + 2 わ 7」?
- ・ 「わっはっはとは!!」と「わっはっはとわ!!」?
- ・ 「コンニチワ」と「今日は」?
- ・ 地面は、「じめん」か「ぢめん」か? (ローマ字変換はどうする???)
- ・ 意地悪は、「いじわる」か「いちわる」か?
- ・ 痔は、「じ」か「ぢ」か?
- ・ 鼻血は、「はなじ」か「はなぢ」か?
- ・ わずらわしい・・・わづらわしい?
- ・ いい加減にしろ・・・よい湯かげんです?