

「数学の問題の発見的解き方 ポリア 柴垣和三雄、金山靖夫訳 みすず書房」 (10) (最終)
ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

【<ホームページの「会員の活躍」欄の閲覧について】 (過去のレポートで気になることがありました。)

「会員の活躍」欄を開くと、「平成26、25年度」は青色で表示され、クリックすると、
「Webページが見つかりません」とのメッセージ、そこで、ピンク色(?)の「平成27年度」を開くと、
「平成26年度～平成22年度」がピンク色で表示され、クリックして閲覧することができました。

第二部 一般的方法に向かって

----- <問題、解説など> -----

第15章 推測と科学的方法 (続き)

<第15章の例題と注釈>

15.53 観察せよ

$$\begin{aligned}\sqrt{2} - 1 &= \sqrt{2} - \sqrt{1} \\ (\sqrt{2} - 1)^2 &= 3 - 2\sqrt{2} = \sqrt{9} - \sqrt{8} \\ (\sqrt{2} - 1)^3 &= 5\sqrt{2} - 7 = \sqrt{50} - \sqrt{49} \\ (\sqrt{2} - 1)^4 &= 17 - 12\sqrt{2} = \sqrt{289} - \sqrt{288} \\ \dots &\text{一般化してみよ。その推測を証明せよ。}\end{aligned}$$

(次は、本の解答をそのまま転記、下線は私) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、
 $(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{m+1} - \sqrt{m}$ ここで m は n に依存する一つの正整数である。証明は
(平易な) 数学的帰納法で American Mathematical Monthly, vol. 58, 1951, 566 ページ を見よ。
(とあるだけで、証明、解説などは全くなくて、その分、勝手にいろいろやってみたが?)

$$(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{m+1} - \sqrt{m} \text{ の証明}$$

(数学的帰納法による)

(I) $n = 1$ のとき

$$(\sqrt{2} - 1)^1 = \sqrt{2} - 1 = \sqrt{1+1} - \sqrt{1} \quad m = 1 \text{ とすればよい。}$$

(II) $n = k$ のとき $(\sqrt{2} - 1)^k = \sqrt{m+1} - \sqrt{m}$ となる正整数 m があると仮定する。

$$\begin{aligned}n = k+1 \text{ のとき } (\sqrt{2} - 1)^{k+1} &= (\sqrt{m+1} - \sqrt{m}) \cdot (\sqrt{2} - 1) \\ &= \sqrt{2(m+1)} + \sqrt{m} - (\sqrt{2m} + \sqrt{m+1}) \\ &= \sqrt{3m+2} + 2\sqrt{2m(m+1)} - \sqrt{3m+1} - 2\sqrt{2m(m+1)} \\ &= \sqrt{\{3m+1 + 2\sqrt{2m(m+1)}\} + 1} - \sqrt{3m+1 + 2\sqrt{2m(m+1)}} \\ &= \sqrt{M+1} - \sqrt{M}\end{aligned}$$

$n = k+1$ のときも成立する。(I)、(II) よりすべての自然数 n について成立する。

<気になること - その1> $M = 3m+1 + 2\sqrt{2m(m+1)}$ 、 $\sqrt{2m(m+1)}$ は正整数になるか?

(別の試み - 数学的帰納法による)

$$(\sqrt{2} - 1)^n = (-1)^{n-1} (a_n \sqrt{2} - b_n), a_n, b_n \text{ は正整数で、 } 2a_n^2 - b_n^2 = (-1)^{n-1} \text{ を満たす。}$$

(I) $n = 1$ のとき

$$(\sqrt{2} - 1)^1 = \sqrt{2} - 1 \text{ より } a_1 = b_1 = 1 \text{ で、 } 2a_1^2 - b_1^2 = 1 = (-1)^2 \text{ を満たす。}$$

(II) $n = k$ のとき $(\sqrt{2} - 1)^k = (-1)^{k-1} (a_k \sqrt{2} - b_k)$
 a_k, b_k は正整数で、 $2a_k^2 - b_k^2 = (-1)^{k-1}$ を満たすと仮定する。

$$\begin{aligned}n = k+1 \text{ について } (\sqrt{2} - 1)^{k+1} &= (-1)^{k-1} (a_k \sqrt{2} - b_k) (\sqrt{2} - 1) \\ &= (-1)^k \{(a_k + b_k) \sqrt{2} - (2a_k + b_k)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ここで } \begin{cases} a_{k+1} = a_k + b_k \\ b_{k+1} = 2a_k + b_k \end{cases} \text{ とすれば、 } a_k, b_k \text{ はともに正整数で、} \\ (\sqrt{2} - 1)^{k+1} &= (-1)^k (a_{k+1} \sqrt{2} - b_{k+1}) \\ 2a_{k+1}^2 - b_{k+1}^2 &= 2(a_k + b_k)^2 - (2a_k + b_k)^2 \\ &= -(2a_k^2 - b_k^2) \\ &= (-1)^{k+1}\end{aligned}$$

よって $n = k+1$ のときも成立 $\dots$

<点検として>

$$\begin{aligned}
 2a_n^2 - b_n^2 &= (-1)^{n+1} \text{ より } 2a_n^2 = b_n^2 - (-1)^n \\
 (\sqrt{2} - 1)^n &= (-1)^{n-1} (\sqrt{2a_n^2} - \sqrt{b_n^2}) \\
 &= (-1)^{n-1} (\sqrt{b_n^2 - (-1)^n} - \sqrt{b_n^2}) \\
 &= \begin{cases} n \text{ が奇数のとき} & \sqrt{b_n^2 + 1} - \sqrt{b_n^2} \\ n \text{ が偶数のとき} & \sqrt{b_n^2} - \sqrt{b_n^2 - 1} \end{cases} \quad (= \sqrt{m+1} - \sqrt{m}) \\
 (\sqrt{2} - 1)^n &= \sqrt{m+1} - \sqrt{m} \quad \text{が成立}
 \end{aligned}$$

<気になること - その2> 二つの数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ の行方？

$$(\sqrt{2} - 1)^n = (-1)^{n-1} (a_n \sqrt{2} - b_n) \text{ より、}$$

$$a_1 = b_1 = 1 \text{ で、} \begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n & \dots \textcircled{1} \\ b_{n+1} = 2a_n + b_n & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \text{ より、 } b_n = a_{n+1} - a_n \quad \textcircled{2} \text{ に代入 } a_{n+2} - a_{n+1} = 2a_n + a_{n+1} - a_n$$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n = 0$$

$$\text{特性方程式は } x^2 - 2x - 1 = 0 \text{ で } x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$a_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n \text{ として、}$$

$$\text{また、} a_1 = b_1 = 1, a_2 = 2 \quad \textcircled{3}$$

$$n = 1, 2 \text{ から、}$$

$$a_1 = A(1+\sqrt{2}) + B(1-\sqrt{2}) = 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$a_2 = A(3+2\sqrt{2}) + B(3-2\sqrt{2}) = 2 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} \times 2 - \textcircled{4} \quad -A - B = 0, B = -A$$

$$\textcircled{3} \text{ より、 } 2\sqrt{2} A = 1,$$

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}}, B = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$a_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}},$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= a_{n+1} - a_n = \dots \\
 &= \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2}
 \end{aligned}$$

<チェック>

$$2a_n^2 - b_n^2 = (-1)^{n+1} \text{ を満たす。}$$

<元に戻って>

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{2} - 1)^n &= (-1)^{n-1} (a_n \sqrt{2} - b_n) \\
 &= (-1)^{n-1} \left\{ \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2} - \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2} \right\} \\
 &= (-1)^n (1 - \sqrt{2})^n = (\sqrt{2} - 1)^n
 \end{aligned}$$

「当たり前でした！！！」

<余白を利用して>

1. この「数学散歩」のうしろのローマ数字について (ネットで検索)

アラビア数字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
ローマ数字	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	...

2. 「悪のA I 論 あなたはここまで支配されている 平和博 朝日新書」

「アマゾンがA I 採用打ち切り. 『女性差別』の欠陥露呈で」・・・原因はA I による「女性嫌い」だった。・・・その原因は、A I が学習したデータにあった。

・・・2013 年の論文では、「スクールバス」「携帯電話」「カマキリ」「犬」といった画像にノイズを加えたところA I はすべてを「ダチョウ」と認識したという。

3. 年祝い (雑学実用知識 三省堂、他) 信長は幸若舞で「人間50年・・・」

61 歳	還 暦	77 歳	喜 寿	88 歳	米 寿	99 歳	白 寿
70 歳	古 希	80 歳	傘 寿	90 歳	卒 寿	100 歳	百 寿