数学散歩　X-2　　　　　　　　　　２０１９．１１．β　　岐阜市　村山鐔司

「数学の問題の発見的解き方 ポリア 柴垣和三雄、金山靖夫訳 みすず書房」 (2)

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

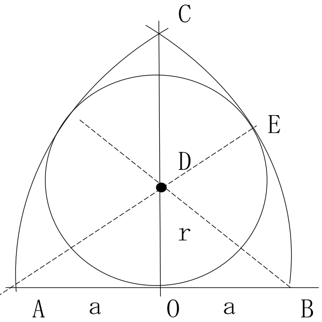
第一部　　パターン

＜問題、解説など＞

第２章　　デカルトのパターン　(1/2)

＜幾何学からの例＞

⑴　　直線AB と二つの円弧 AC、BC とによって三角形状の領域が囲まれている。
二つの円弧の中心はA、B で、二つの円は互いに他の円の中心を通っている。
三角形状の領域内に、三つの境界線の
すべてに接する一つの円を作図せよ。

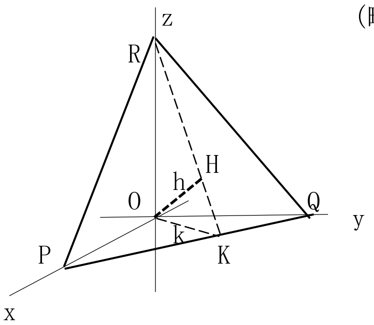


（略解）　$O(0,0)$、$A(-a,0)$、$B(a,0)$、
弧BC、弧AC は中心 A、B 、半径 2a、
(a＞0)、求める円の半径 r、中心 $D(0,r)$、
円の接点を E とする。
AD = AE-DE 、AO ⊥ DO だから
$AD^2 = (2a-r)^2 = a^2 + r^2$ より

$$r = \frac{3}{4}a$$

立体幾何学におけるピタゴラスの定理の類比―過去の「数学散歩」で『四平方の定理』と紹介

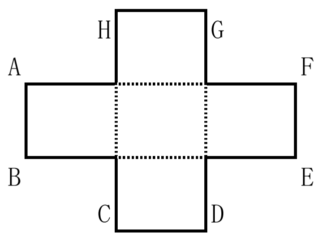
⑵　　三ー直角の頂点が O である四面体において、O で交わる三つの面の面積 A、B、C が分かっている。O に対する面の面積 D を求めよ。



(略解―図参照)　①　$P(p,0,0)$、$Q(0,q,0)$、$R(0,0,r)$　(p、q、r＞0)、
OK⊥PQとすると平面ORK⊥PQでOH⊥PQ、OH⊥RKとするとOH⊥平面PQR
OK = k、OH = h とおく。
②　平面PQR : $x/p + y/q + z/r = 1$ より、$qrx + rpy + pqz = pqr$
∴　　$h = pqr / \sqrt{(qr)^2 + (rp)^2 + (pq)^2}$
③　qr = 2・△OQR = 2A、rp = 2・△ORP = 2B、pq = 2・△OPQ = 2C
△PQR = D だから、四面体OPQR の体積 V は、
V = pqr / 6 = h・D / 3　　∴　　2D = pqr / h
以上から、　$4D^2 = 4(A^2 + B^2 + C^2)$ で　　$D^2 = A^2 + B^2 + C^2$

(別解―本の解から) D = △PQR = PQ・RK / 2 より、
$4D^2 = PQ^2 \cdot RK^2 = PQ^2 \cdot (OK^2 + OR^2) = (PQ \cdot OK)^2 + (OP^2 + OQ^2) \cdot OR^2$
$= (2 \cdot \triangle OPQ)^2 + (2 \cdot \triangle OPR)^2 + (2 \cdot \triangle OQR)^2 = 4(A^2+B^2+C^2)$　∴　$D^2 = A^2+B^2+C^2$　(四平方の定理)

＜パスカルからの一例－五つの正方形から二つの正方形？＞



(左図参照) 同じ大きさの五個の正方形からなる十字形の紙片がある。
この紙片を一つの直線で二つに切り、次にその一方をまた一つの直線で二つに切って、これら三つの切れはしを適当につないだとき、同じ大きさの二つの正方形が並置された形になるようにせよ。

(いろいろやってみてください。)
①　　BF、HD を直線で結び、交点を X とする。
②　BF、HX で切って三つの切れはしにする。　③　うまくくっつければ、二つの正方形が並置

(計算)　五つの正方形の一辺 (AB) の長さを a 、二つの並置正方形の長辺の長さを x 、短辺の長さを x/2 とすると、$x \cdot x/2 = 5 \cdot a^2$ で、　$x^2 = 10a^2 = 9a^2 + a^2$
(本から) 解答は読者に任せよう。

＜第２章の例題と注釈＞　(第一部(2.1～2.16)、第二部(2.17～2.78) から)

第一部(2.1～2.16)

2.9　　三ー直角の頂点が O である四面体において、O で交わる三つの面の面積 A、B、C が与えられているとき、この四面体の体積 V を求めよ。

(略解) 三ー直角の頂点 O で交わる三辺の長さを p、q、r とする。三つの直角三角形の面積が、A、B、C より、qr = 2A、rp = 2B、pq = 2C とでき、$p^2q^2r^2 = 8ABC$
$V = (1/3)(1/2)pqr = (1/6)\sqrt{p^2q^2r^2} = (1/3)\sqrt{2ABC}$

2.10　（ヘロンの定理の類比）三ー直角の頂点をもつ四面体で、この頂点に対する面（三角形）の三辺の長さ a、b、c が与えられているとき、この四面体の体積Vを求めよ。($S^2=(a^2+b^2+c^2)/2$ を利用)

（略解）四面体を O-PQR、P(p,0,0)、Q(0,q,0)、R(0,0,r)（p、q、r＞0）とおく。

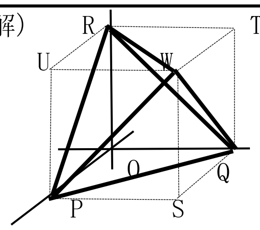
$a^2 = QR^2 = q^2+r^2$　、　$b^2 = RP^2 = r^2+p^2$　、　$c^2 = PQ^2 = p^2+q^2$　、　$S^2 = (a^2+b^2+c^2)/2 = p^2+q^2+r^2$

より、$S^2-p^2 = q^2+r^2 = a^2$ で $S^2-r^2 = q^2+r^2 = a^2$ より $p^2=S^2-a^2$ 同様に、$q^2=S^2-b^2$、$r^2=S^2-c^2$、

$V = (1/6)\sqrt{p^2q^2r^2} = \sqrt{(S^2-a^2)(S^2-b^2)(S^2-c^2)}\ /\ 6$　　（注：面は鋭角三角形）

2.13　（ヘロンの定理の別な類比）四面体の一つの面（三角形）の三辺の長さが a、b、c、また四面体の各辺はその対辺と等長である。四面体の体積 V を a、b、c で表せ。

（略解）



（図参照 2.10 を利用）　四面体O-PQR から直方体OPSQ-RUWT をつくる。
四辺形OPSQ、OQTR、ORUP、… は長方形。直方体の体積は pqr
また、四つの四面体QSPW、WTRQ、RUWP、POQR の体積はともに pqr / 6
だから、求める体積は

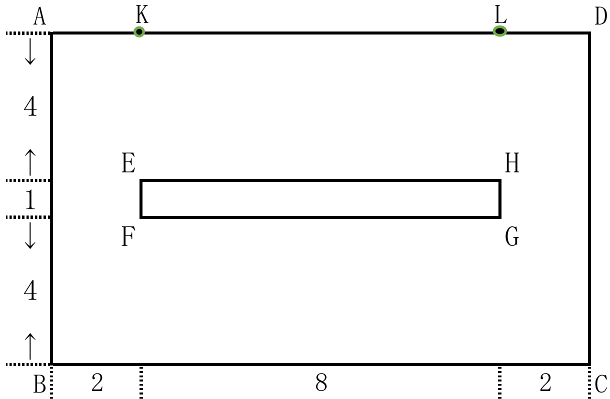
$V = \{1-4(1/6)\}pqr = pqr\ /\ 3 = \sqrt{(S^2-a^2)(S^2-b^2)(S^2-c^2)}\ /\ 3$

（参考：「Ⅷ-3 2017.10.α」等面四面体（栗田稔名古屋大学名誉教授）

（何か気になったこと：底面積が s 、高さが h の三角錐（四面体）の体積は何故 V = sh/3 か？）

2.15　<パスカルからの一例ー五つの正方形から二つの正方形？>（前掲）

2.16　一枚の紙片である長方形ABCD（AB = DC = 9、AD = BC = 12）は、中に長方形EFGH



（EF = HG = 1、EH = FG = 8）の孔（あな）があいており、両長方形は中心を共有し、対応する二辺はそれぞれ平行である。

この紙片を丁度二つの線で切って二つの部分に分け、それを合わせると一つの正方形になるようにせよ。

(追加として)

AK = LD = 2、KL = 8、KE = LH = 4、
EF = HG = 1

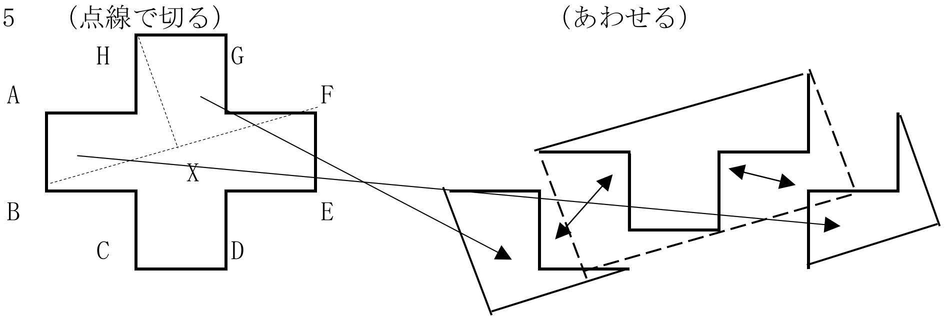
（本の解を参考に）　(a)　正方形の一辺の長さを x とすると、9×12 － 1×8 = 100 より x = 10

(b)　10 = 12 － 2 = 9 + 1　切って、左へ 2 、上へ 1 ずらす。

(a)　中心に関する対称性を保持。　いろいろやってみては？

<参考図など>

2.15　（点線で切る）　　　　　　　　　　（あわせる）



2.16　（点線で切る）　　　　　　　　　　（合わせる）