数学散歩　X-3　　　　　　　　　２０１９．１２．α　　岐阜市　村山鐔司

「数学の問題の発見的解き方 ポリア 柴垣和三雄、金山靖夫訳 みすず書房」 ⑶

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

（誤りの訂正）2019.11.γ「数学散歩 号外 2-1 」練習問題 2.11 の（解） 3・5+1 = 16 = 24 → 2^4

第一部　　パターン

＜問題、解説など＞

第２章　　デカルトのパターン　(2/2)

第二部(2.17～2.78)

2.21　父親が何人かの子供を残して死んだが、子供達は次のやり方で父の財産を分けた。
第一子は 100 クラウンと残りの 10 分の 1 を受け取る。
第二子は 200 クラウンと残りの 10 分の 1 を受け取る。
第三子は 300 クラウンと残りの 10 分の 1 を受け取る。
第四子は 400 クラウンと残りの 10 分の 1 を受け取る。
等々である。
さて、最後に、財産は子供達すべてに平等に分配された。財産の総額は幾らで、子供達は何人いて、幾ら受け取ったか。
(ｵｲﾗｰ)

（オイラーの出題　本から）…このような偉人たちが、「文章題」の解法に方程式を応用することを…、自分の威信にかかわるとは思わなかったことに注意すべきである。

（略解）　父親の財産を A、子供達への分配を x とすると、

第一子　　$x = 100 + \dfrac{A - 100}{10}$　・・・①

第二子　　$x = 200 + \dfrac{A - x - 200}{10}$　・・・②

第三子　　$x = 300 + \dfrac{A - 2x - 300}{10}$　・・・③

第四子　　$x = 400 + \dfrac{A - 3x - 400}{10}$　・・・④

① - ②より（② - ③、③ - ④も同じ）

$-100 + \dfrac{x + 100}{10} = 0$ 、$x = 900$

①より、　$900 = 100 + \dfrac{A - 100}{10}$

A = 8100、8100 ÷ 900 = 9
より、
財産は 8100 クラウン、
子供は 9 人で、1 人 900 クラウン

（確認）　第八子　$800 + \dfrac{8100-6300-800}{10} = 900$　　第九子　$900 + \dfrac{8100-7200-900}{10} = 900$ 残り 0

2.27　12 頭の牛が 10/3(=3+(1/3)) ｴｰｶｰの牧場を 4 週間で食べつくし、21 頭の牛が 10 ｴｰｶｰの同様な牧場を 9 週間で食べつくす。何頭の牛が 24 エーカーを 18 週間で食べつくすか。(ﾆｭｰﾄﾝ)

（略解）　α：1ｴｰｶｰ に最初に生えている草の量　γ：1 ｴｰｶｰ で 1 週間に生える草の量
β：1 頭の牛が 1 週間に食べる草の量
x 頭の牛が 24 ｴｰｶｰ を 18 週間で食べつくすとすると、

$$\begin{cases} (10/3)(\alpha + 4\gamma)(= 12 \cdot 4\beta) = 48\beta & \cdots ① \\ 10 \cdot (\alpha + 9\gamma)(= 21 \cdot 9\beta) = 189\beta & \cdots ② \\ 24 \cdot (\alpha + 18\gamma) = x \cdot 18\beta & \cdots ③ \ (\ /6) \end{cases}$$

①×3　$10 \cdot (\alpha + 4\gamma) = 144\beta$ … ①’
②－①’　$50\gamma = 45\beta$ より　$\gamma = (9/10)\beta$
①’より　$\alpha = (54/5)\beta$

③より $4 \cdot (\alpha + 18\gamma) = 3x\beta$、　x = ・・・= 36　　　36 週間

2.29　3 項からなる等比数列がある。その項の和は 19 で、各項の平方の和は 133 である。各項を求めよ。 (ﾆｭｰﾄﾝ による)

（略解）　$a+ar+ar^2 = a(1+r+r^2) = 19$ … ①
$a^2+a^2r^2+a^2r^4 = a(1+r+r^2) \cdot a(1-r+r^2) = 133 = 19 \cdot 7$ … ②
$\therefore \quad a(1-r+r^2) = 7$ … ③

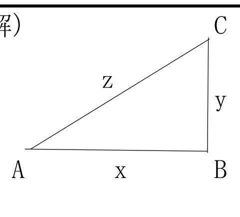
①－②より 2ar = 12 で ar = 6、a = r/6 ・・・ r = 2/3、3/2 、a = 9、4
3 項は、9、6、4 とその逆の 4、6、9

2.30　4 項からなる等比数列がある。両端の 2 項の和は 13 、中央の 2項の和は 4 である。各項を求めよ。 (ﾆｭｰﾄﾝ による)

（答のみ紹介）　4 項は、1/5、4/5、16/5、64/5 とその逆の 64/5、16/5、4/5、1/5

2.36　∠B が直角の△ABCの面積Sと周の長さ2ℓが与えられているとき、斜辺 CA の長さを求めよ。

（略解）



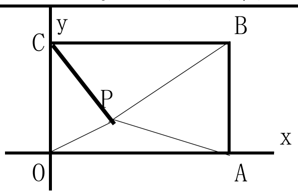
AB = x、BC = y、CA = z 、x+y+z = 2ℓ、$z = \sqrt{x^2+y^2}$、xy = 2S
z を求める。 $z^2 = (x+y)^2 - 2xy = (2\ell - z)^2 - 4S$ より、
$4\ell z = 4\ell^2 - 4S$　　∴　　CA = ℓ - S/ℓ

2.40　辺の長さがすべて a である等辺六角形がある。六つの角のうち三つは直角、他は鈍角で、直角と鈍角が交互になっている。六角形の面積を求めよ。

（略解）（図をかけば分かる。）一辺の長さが$\sqrt{2}\cdot a$ である正三角形の三つの辺の外側に、二辺の長さが a の直角二等辺三角形をそれぞれくっつければよい。面積は　$a^2(3+\sqrt{3})/2$

2.43　一つの長方形の内部に一点 P があり、この長方形の一隅から P までの距離は 5 ヤード、それに相対する隅からは 14 ヤード、第三の隅からは 10 ヤードである。第四の隅から P までの距離は何ヤードか。　（注：解答のページには 「ｽﾀﾝﾌｫｰﾄﾞ 1960」 とある）

（略解）



図で、O(0,0)、A(a,0)、B(a,b)、C(0,b)、P(x,y) として、

$OP^2 = x^2 + y^2 = 5^2$　　・・・①

$BP^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 = 14^2$　　・・・②

$AP^2 = (x-a)^2 + y^2 = 10^2$　　・・・③

このとき、　$CP^2 = x^2 + (y-b)^2 = ?$

①+②−③　より、 $x^2 + (y-b)^2 = 25+196-100 = 121 = 11^2$　　（答）　11 ヤード

（参考　①、②、③には未知数は、x、y、a、b の 4 個で式は 3 個にもかかわらず・・・）

2.53　一つの三角形が、辺 a のまわりに、次に辺 b のまわりに、最後に辺 c のまわりに回転すれば、三つの回転体ができる。これら三つの立体の体積の比、ならびに表面積の比を求めよ。

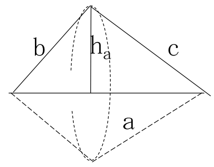
（略解）三辺の長さ a、b、c に対する三角形の高さを、

h_a 、h_b 、h_c

回転体の体積を、 V_a 、V_b 、V_c

表面積を、S_a 、S_b 、S_c

とし、三角形の面積を S とすれば、



体積： $V_a = (\pi/3)\cdot {h_a}^2\cdot a = (4\pi/3)\cdot(h_a\cdot a/2)^2\cdot(1/a) = (4\pi/3)\cdot S^2/a$

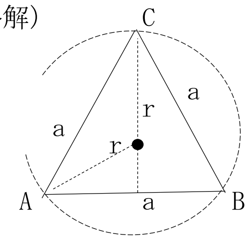
同様に、　$V_b = (4\pi/3)\cdot S^2/b$　、$V_c = (4\pi/3)\cdot S^2/c$、　比は、1/a ： 1/b ： 1/c

表面積：$S_a = \pi b^2\cdot\dfrac{2\pi h_a}{2\pi b} + \pi c^2\cdot\dfrac{2\pi h_a}{2\pi c} = \pi(b+c)\cdot h_a = 2\pi(b+c)\dfrac{h_a\cdot a}{2\cdot a} = 2\pi S\cdot\dfrac{b+c}{a}$

同様に、　$S_b = 2\pi S\cdot\dfrac{c+a}{b}$、　$S_c = 2\pi S\cdot\dfrac{a+b}{c}$　、比は　$\dfrac{b+c}{a} : \dfrac{c+a}{b} : \dfrac{a+b}{c}$

2.55　（球面計：レンズの曲率を決定するのに用いられる ― 本には球面計の解説が数行あり）
　球面上に四点 A、B、C、D がある。△ABC は一辺の長さが a の正三角形である。D から平面ABC （△ABC）に下した垂線の長さは h で、その足は△ABC の中心である。a と h が与えられたとき、球の半径 R を計算せよ。

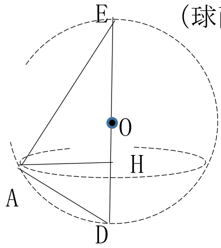
（略解）



△ABC の外接円は球面上にある。

半径を r とすると、

$r = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}\cdot a}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$



（球面O の断面図）

直径DE = 2R、△ABC の中心 H 、

AH = r , HD = h、EH = 2R − h、

$AH^2 = HD\cdot EH$、$r^2 = h(2R-h)$

$a^2/3 = 2Rh - h^2$

$\therefore\quad R = \dfrac{a^2}{6h} + \dfrac{h}{2}$

2.57　互いに 59 マイル離れたところにいる二人の郵便配達人が、途中で出会うべく、朝出発した。A は馬で 2 時間に 7 マイルの速さで、B は 3 時間に 8 マイルの速さで進み、B は A より 1 時間遅れて出発した。A は B に出合うまでに何マイル進むか。(ニュートン)

（略解） A が出発してから B に出合うまでに x 時間かかったとすると、

$(7/2)\cdot x + (8/3)\cdot(x-1) = 59$、より、x = 10　　10 時間で 35 マイル（答）

2.69　一つの整数がある。100 を加えれば平方数になり、また、168 を加えれば別の平方数になる。その数を求めよ。

（略解）　$\begin{cases} x + 100 = a^2 \\ x + 168 = b^2 \end{cases}$　　(b+a)(b−a) = 68 = 1・68、2・34、4・17

b+a と b−a はともに偶数か、ともに奇数だから、b+a = 34、b−a = 2

∴　b = 18、a = 16　　　x = 156（答）