数学散歩　X-4　　　　　　　　　　２０１９．１２．β　　岐阜市　村山錞司

「数学の問題の発見的解き方 ポリア 柴垣和三雄、金山靖夫訳 みすず書房」 ⑷

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

第一部　　パターン

＜問題、解説など＞

第３章　　あともどり（拾って抜き書きします。適当に解釈をよろしく。）

3.1　　小さな発見の物語（少年ガウスの伝説的物語）

1+2+3+…+20 の計算

$$\begin{array}{r} 1+2+3+\cdots+20 \\ +)\ 20+19+\cdots+1 \\ \hline 21+21+\cdots+21 \end{array} = 21\times 20\ /\ 2 = 210$$

、一般に $1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$

3.2　　意外なところから

$(n+1)^3-n^3 = 3n^2+3n+1$ から

$$\begin{array}{l} 2^3 - 1^3 = 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1 \\ 3^3 - 2^3 = 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1 \\ \cdots \\ +)\ (n+1)^3 - n^3 = 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1 \\ \hline \end{array}$$

$(n+1)^3- 1 = 3(1^2+2^2+\cdots+n^2) + 3(1+2+\cdots+n) + n$

$3(1^2+2^2+\cdots+n^2) = \{(n+1)^3-(n+1)\}-3(1+2+\cdots+n)$

・・・・・・

$$\therefore\ 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3.3　　これは応用しないではおれない

$S_k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$ を考える。

$S_0 = n$ 、$S_1 = 1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)\ /\ 2$

$S_2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)\ /\ 6$

$S_3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 =$ ？

$(n+1)^4-n^4 = 4n^3+6n^2+4n+1$ より

・・・

$S_3 = \{n(n+1)/2\}^2$

3.4　　あともどり　　本では、$\binom{n}{k}$ を ${}_nC_k$ とした。

$(n+1)^{k+1} = n^{k+1} + {}_{k+1}C_1\, n^k + {}_{k+1}C_2\, n^{k-1} + \cdots + 1$ だから

$$\begin{array}{l} 2^{k+1} - 1^{k+1} = {}_{k+1}C_1\, 1^k + {}_{k+1}C_2\, 1^{k-1} + \cdots + 1 \\ 3^{k+1} - 2^{k+1} = {}_{k+1}C_1\, 2^k + {}_{k+1}C_2\, 2^{k-1} + \cdots + 1 \\ \cdots\cdots \\ +)\ (n+1)^{k+1} - n^{k+1} = {}_{k+1}C_1\, n^k + {}_{k+1}C_2\, n^{k-1} + \cdots + 1 \\ \hline (n+1)^{k+1} - 1 = {}_{k+1}C_1\, S_k + {}_{k+1}C_2\, S_{k-1} + \cdots + n \end{array}$$

・・・逐次に、
あともどり的に、
見出すことができる。

3.5　　アブラカダブラ(abracadabra)

```
          (北)   A
               B   B
             R   R   R
           A   A   A   A
         C   C   C   C   C
       A   A   A   A   A   A
         D   D   D   D   D
   (西)    A   A   A   A    (東)
             B   B   B
               R   R
          (南)   A
```

一番上（北端）の A から出発して、
最後（南端）の A まで何通りの仕方で
(ABRACADARA) を読むことができるか。
（本より）何か気付くことはないか。

3.6　　パスカルの三角形

```
                    1
                 1     1
              1     2     1
           1     3     3     1
        1     4     6     4     1
     1     5    10    10     5     1
        6    15    20    15     6
          21    35    35    21
             56    70    56
               126   126
                  252
```

$$\begin{array}{c} {}_0C_0 \\ {}_1C_0 \quad {}_1C_1 \\ {}_2C_0 \quad {}_2C_1 \quad {}_2C_2 \\ {}_3C_0 \quad {}_3C_1 \quad {}_3C_2 \quad {}_3C_3 \\ {}_4C_0 \quad {}_4C_1 \quad {}_4C_2 \quad {}_4C_3 \quad {}_4C_4 \\ {}_5C_0 \quad {}_5C_1 \quad {}_5C_2 \quad {}_5C_3 \quad {}_5C_4 \quad {}_5C_5 \end{array}$$

パスカルの三角形の回帰公式　${}_{n+1}C_r = {}_nC_r + {}_nC_{r-1}$

3.7　　数学的帰納法

二項係数：${}_nC_r = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots r}$　　$r = 0$ のときは、${}_nC_0 = 1$　とする。

（本から）パスカルの（証明に対しての）言葉は・・・歴史的に大切なものである。・・・
彼の証明は、普通に数学的帰納法と呼ばれている推論の基本的なパターンの、最初の実例だ

からである。・・・

第一補題　n = 1 について成立。r = 0、1　で $_1C_0$ = $_1C_1$ = 1 より

第二補題　n = k のとき成立するなら、n = k+1 でも成立。

回帰公式　$_{k+1}C_r = {}_kC_r + {}_kC_{r-1}$　を使って・・・

3.8　さきざきの発見

⑴～⑶　略

⑷　二項定理：　$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 . x + {}_nC_2 . x^2 + \cdots + {}_nC_n . x^n$

3.9　観察し、一般化し、証明し、また証明せよ。

$${}_nC_0{}^2 + {}_nC_1{}^2 + {}_nC_2{}^2 + \cdots + {}_nC_n{}^2 = {}_{2n}C_n$$

$$\begin{aligned}(1+x)^{2n} &= \cdots + {}_{2n}C_n x^n + \cdots \\ &= (1+x)^n(1+x)^n \\ &= ({}_nC_0 + {}_nC_1 . x + {}_nC_2 . x^2 + \cdots + {}_nC_n . x^n) \\ &\qquad \times ({}_nC_0 + {}_nC_1 . x + {}_nC_2 . x^2 + \cdots + {}_nC_n . x^n)\end{aligned}$$

（ $_nC_r = {}_nC_{n-r}$　より　・・・）

＜第３章の例題と注釈＞（第一部(3.1～3.21)、第二部(3.22～3.30)、第三部(3.31～3.55)、第四部(3.56～3.92)から）　（参考になりそうな問題について紹介する。）

第一部(3.1～3.21)　（解は後掲）

3.14　1 + 27 + 125 + ・・・・ + $(2n-1)^3$ を求めよ。

3.16　4 + 25 + 64 + ・・・・ + $(3n-1)^2$ を求めよ。

3.18　1・2 + (1+2)・3 + (1+2+3)・4 + … + {1+2+3+ … +(n-1)}・n を求めよ。

3.19　n(n-1)/2 個の差　2-1、

3-1、3-2

4-1、4-2、4-3

・・・・・・

n-1、n-2、n-3、・・・・・、n-(n-1)

を考え、(a) これらの和、(b) これらの積 、(c) これらの平方の和、を計算せよ。

第二部(3.22～3.30)　（解は後掲）

3.26　凸ｎ角形の対角線の数を求めよ。

3.27　凸ｎ角形の対角線の交点の数を求めよ。多角形の内部にある交点だけを考え、また多角形は「一般的」でどの三本の対角線も一点を共有することはないとする。

3.28　多面体が六つの面を持っている。（多面体は正多面体ではなくて、その面はどの二つをとっても合同ではないとする。）その面を、一つは赤色、二つは青色、三つは茶色に塗るものとする。何通りの異なった塗り方になるか。

（解）3.14　Σ計算による他に、　$1+8+27+64+\cdots+(2n)^3-\{8+64+\cdots+(2n)^3\}$　もある。

（答）　$n^2(2n^2 - 1)$

3.16　3.14 と同様に、　1+16+49+…、4+25+64+…、9+36+81+… の利用もある。

（答）　$n(6n^2 + 3n - 1)/2$

3.18　1+2+3+…+(k-1) = k(k-1)/2 より、

（答）　(n-1)n(n+1))(3n+2)/24

3.19　（答）(a) $n(n^2 - 1)/6$　(b) $2^{n-2}\cdot 3^{n-3}\cdot 4^{n-4}\cdot\cdots\cdot(n-2)^2\cdot(n-1)^1$　(c) $n^2(n^2 - 1)/12$

3.26　（答）$_nC_2 - n = n(n-3)/2$

3.27　（答）$_nC_4 = n(n-1)(n-2)(n-3)/24$

3.28　（答）$6\cdot{}_5C_2 = 60$