数学散歩　X-5　　　　　　　　　　２０２０．１．　β　　岐阜市　村山錞司

「数学の問題の発見的解き方 ポリア 柴垣和三雄、金山靖夫訳 みすず書房」　(5)

先日、メディアコスモス、岐阜市の中央図書館の本棚に上記の本を見かけました。お近くの図書館にもあるかもしれません。見つけられたら、参考にしてタップリ楽しんでください。

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

第一部　　パターン

＜問題、解説など＞

第三部(3.31〜3.55)

3.34　パスカルの三角形

```
                                1
                            1       1
                        1       2       1
                    1       3       3       1
                1       4       6       4       1
            1       5       10      10      5       1
        1       6       15      20      15      6       1
    1       7       21      35      35      21      7       1
1       8       28      56      70      56      28      8       1
```

パスカルの三角形に並ぶ六個の数の和 $1+4+10+20+35+56 = 126$ を考察せよ。この和がパスカルの三角形内に現れる場所はどこか。類比な事実ががないか調べ、一般化し、証明し、さらに証明せよ。

(考察)　　和：$126 = 56 + 70$ より、56 と 70 の間の下の欄

類比：$1+2+3+4+5 = 15$、$1+3+6+10+15+21 = 56$、$1+6+21 = 28$、・・・

一般に、　${}_rC_r + {}_{r+1}C_r + {}_{r+2}C_r + \cdots + {}_nC_r = {}_{n+1}C_{r+1}$

(いろいろやってみる)　${}_rC_r = {}_{r+1}C_{r+1} = 1$ 、 ${}_rC_r + {}_{r+1}C_r = \underline{{}_{r+1}C_{r+1}} + {}_{r+1}C_r = {}_{r+2}C_{r+1}$

$\underline{{}_rC_r + {}_{r+1}C_r + {}_{r+2}C_r + \cdots + {}_kC_r} + {}_{k+1}C_r = \underline{{}_{k+1}C_{r+1}} + {}_{k+1}C_r = \cdots$

＜ パスカルの三角形の回帰公式　${}_{n+1}C_r = {}_nC_r + {}_nC_{r-1}$ ＞

(参考) 前回の 3.7 数学的帰納法参照

第四部(3.56〜3.92) (解は後掲)

3.86　$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$ を表わす短い式を求めよ。

3.87　$1+4x+9x^2+\cdots+n^2x^{n-1}$ を表わす短い式を求めよ。

3.89　$n = 1、2、3、\cdots$ かつ $\alpha \neq \beta$ に対して　$a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{n+\alpha}{n+1+\beta}$

が与えられているとき、次を示せ。　$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n = \dfrac{a_n(n+\alpha) - a_1(1+\beta)}{\alpha - \beta}$

3.90　次の級数の和を求めよ。

$$\frac{p}{q} + \frac{p}{q}\cdot\frac{p+1}{q+1} + \frac{p}{q} + \frac{p}{q}\cdot\frac{p+1}{q+1}\cdot\frac{p+2}{q+2} + \cdots + \frac{p}{q}\cdot\frac{p+1}{q+1}\cdot\frac{p+2}{q+2}\cdot\cdots\cdot\frac{p+n-1}{q+n-1}$$

(略解) 3.86

$$\begin{array}{rl}
S = & 1+2x+3x^2+4x^3 \cdots +nx^{n-1} \\
-)\ xS = & x+2x^2+3x^3+\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n \\ \hline
(1-x)S = & 1+x+x^2+x^3 \cdots + x^{n-1} - nx^n \\
-)\ x(1-x)S = & x+x^2+x^3 \cdots + x^{n-1} + x^n - nx^{n+1} \\ \hline
(1-x)^2 S = & 1-(n+1)x^n + nx^{n+1}
\end{array}$$

$$S = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

3.87

$$\begin{array}{rl}
T = & 1+4x+9x^2+\cdots\cdots+n^2x^{n-1} \\
-)\ xT = & x+4x^2+9x^3+\cdots+(n-1)^2x^{n-1} + n^2x^n \\ \hline
(1-x)T = & 1+3x+5x^2+\cdots\cdots+(2n-1)x^{n-1} - n^2x^n \\
-)\ x(1-x)T = & x+3x^2+5x^3 \cdots +(2n-3)x^{n-1} +(2n-1)x^n - n^2x^{n+1} \\ \hline
(1-x)^2T = & -1+2(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) - (n^2+2n-1)x^n + n^2x^{n+1} \\
-)\ x(1-x)^2T = & -x+2(x+x^2+\cdots+x^{n-1}+x^n) - (n^2+2n-1)x^{n+1} - n^2x^{n+2} \\ \hline
(1-x)^3T = & 1+x-2x^n - (n^2+2n-1)x^n + (2n^2+2n-1)x^{n+1} + n^2x^{n+2}
\end{array}$$

$$T = \frac{1+x-(n+1)^2x^n + (2n^2+2n-1)x^{n+1} - nx^{n+2}}{(1-x)^3}$$

3.89(証明の概略)　数学的帰納法による。

(Ⅰ) $n = 1$ のとき、　(左辺) $= a_1$ 、(右辺) $= \dfrac{a_1(1+\alpha) - a_1(1+\beta)}{\alpha - \beta} = a_1$ で成立

(Ⅱ) $n = k$ のとき、成立仮定　$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k = \dfrac{a_k(k+\alpha) - a_1(1+\beta)}{\alpha - \beta}$

$n = k+1$ のとき、(左辺) $= a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1} = \dfrac{a_k(k+\alpha) - a_1(1+\beta)}{\alpha - \beta} + a_{k+1}$

仮定 ($a_{k+1} = a_k \cdot \dfrac{k+\alpha}{k+1+\beta}$ より) $= \dfrac{a_{k+1}(k+1+\beta) - a_1(1+\beta)}{\alpha - \beta} + a_{k+1}$

$= \dfrac{a_{k+1}(k+1+\alpha) - a_1(1+\beta)}{\alpha - \beta}$ = (右辺)

(Ⅰ)、(Ⅱ)より、すべての自然数 n について等式は成立する。

3.90 (略解 3.89 を利用)

$a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{p+n}{q+n} = a_n \cdot \dfrac{n+p}{n+1+(q-1)}$ $\alpha = p$、$\beta = q-1$、$\alpha - \beta = p-q+1$

$a_1 = \dfrac{p}{q}$、 $a_2 = \dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{p+1}{q+1}$、 $a_3 = \dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{p+1}{q+1} \cdot \dfrac{p+2}{q+2} + \cdots$

$a_n = \dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{p+1}{q+1} \cdot \dfrac{p+2}{q+2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{p+n-1}{q+n-1}$ より

$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n = \dfrac{1}{p-q+1} \cdot \left\{ \dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{p+1}{q+1} \cdot \cdots \cdot \dfrac{p+n-1}{q+n-1} \cdot (n+p) - \dfrac{p}{q} \cdot q \right\}$

$= \dfrac{p}{p-q+1} \cdot \left(\dfrac{p+1}{q} \cdot \dfrac{p+2}{q+1} \cdot \cdots \cdot \dfrac{p+n}{q+n-1} - 1 \right)$ (答)

第4章 重ね合わせ (その1)

4.1 補間

n 個の異なった数 x_1、x_2、…、x_n と n 個の y_1、y_2、…、y_n とが与えられてとき、n 個の条件 $f(x_1) = y_1$、$f(x_2) = y_2$、…、$f(x_n) = y_n$ を満たす次数の最も低い多項式 $f(x)$ を求めよ。

4.2～4.3 から ＜ラグランジュの補間公式＞

$$f(x) = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)} + \cdots + y_n \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

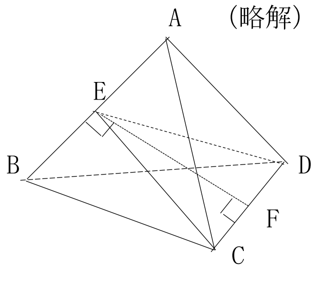
は $f(x_i) = y_i$ ($i = 1$、2、3、…、n) を満たす (n-1)次を超えない多項式である。

4.4 パターン (略)

＜第4章の例題と注釈＞(第一部(4.1～4.16)(略)、第二部(4.17～4.36)

第二部(4.17～4.36) 1/2

4.17 四面体において、相対する二辺は等長 a で、互いに垂直、おのおのはそれらの中点を結ぶ長さ b の線分に垂直である。四面体の体積を求めよ。



(略解) 左図より AB = CD = a、AB、CD の中点をそれぞれ E、F、EF = b、AB⊥CD、EF⊥AB、CD とする。

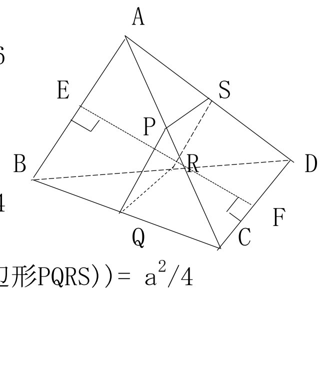
△ECD = ab/2、

∴ $V = (1/3) \cdot (ab/2) \cdot a = a^2b / 6$

(別解) P、Q、R、S はそれぞれ AC、BC、BD、AD の中点、

PQ = SR = PS = QR = a/2、

AB⊥CD より 平行四辺形PQRS = $a^2/4$



(次回の報告：角台公式 $V = (L+4M+N) \cdot h / 6$ より)

L (上底 (辺AB)) = 0、M(下底(辺 CD))=0、M(中央断面 (平行四辺形PQRS))= $a^2/4$

h = EF = b だから、$V = \{0+4 \cdot (a^2/4)+0\} \cdot b / 6 = a^2b / 6$

(本には、解答なし。点検をよろしく。)