数学散歩　X-6　　　　　　　　　２０２０．１．　γ　　岐阜市　村山錞司

「数学の問題の発見的解き方 ポリア 柴垣和三雄、金山靖夫訳 みすず書房」　⑹

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

第一部　　パターン

＜問題、解説など＞

## 第４章　　重ね合わせ　　（その２）

＜第４章の例題と注釈＞

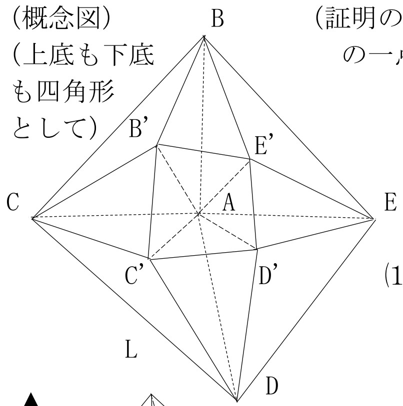
第二部(4.17～4.36)　2/2

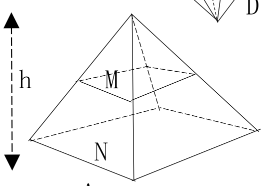
**4.22　＜角台（疑似角柱）の（体積）の公式＞**

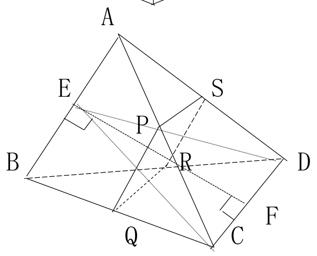
（概要）角台は多面体で、下底、上底の二面は平行、ともに多角形で、その他の面は側面である。角台には三種類の辺があり、下底（多角形）を囲む辺、上底（多角形）を囲む辺、並びに側辺である。側辺はどれも下底の一頂点と上底の一頂点とを結ぶ。二底面間の距離は角台の高さである。上下両底面に平行で、それらから等距離にある平面で、角台と交わる多角形を中央断面という。角台の体積を V 、高さを h 、下底、中央断面、上底の面積を L、M、N とすると、

$$V = \frac{(L + 4M + N)\ h}{6}$$ である。

（概念図）
（上底も下底も四角形として）




（証明の考え方の紹介）下底 BCDE、上底（こちら側）B'C'D'E'、下底上の一点を A とし、角台を次の⑴～⑶の３種類の立体に分けて考える。

⑴　角錐：A-B'C'D'E'　　　　　　　　（四角錐）

⑵　角錐：B'-ABC、角錐：C'-ACD、
　　角錐：D'-ADE、角錐：E'-AEB　　　（三角錐）

⑶　四面体：B'C'-AC、四面体：C'D'-AD、
　　四面体：D'E'-AE、四面体：E'B'-AB

⑴、⑵の角錐について

L（頂点）= 0、M （中央断面）、N = 4M（底面）

$$V = \frac{1}{3}\ N \cdot h = \frac{(2N)\cdot h}{6} = \frac{(L+4M+N)\cdot h}{6}$$

⑶の四面体について (B'C'-AC 、… を左下図 AB-CD として)

AB = a、CD = b、なす角 θ 、EF = h 、

M = 四角形PQRS = ab・sinθ/4 、

L = (線分AB) = 0 、

N = (線分CD) = 0 、

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot bh \right) \cdot a \cdot \sin\theta$$

$$= \frac{ab\ \sin\theta \cdot h}{6} 、\quad \frac{(L+4M+N)\cdot h}{6} = \frac{ab\ \sin\theta \cdot h}{6}$$

$$\therefore \quad V = \frac{(L+4M+N)\cdot h}{6}$$

（参考：前回の4.17）

⑴、⑵、⑶を合わせれば、角台の計算公式が成立する。

**4.32　＜シンプソンの規則（公式）＞について・・・**

f(x) は $a \leqq x \leqq a+h$ で定義された連続な関数とし、

$$I = \int_a^{a+h} f(x)dx 、\ f(a) = L 、\ f\left(a+\frac{h}{2}\right) = M 、f(a+h) = N$$

とおくと、ある条件のもとに、 $I = \dfrac{L + 4M + N}{6}\ h$ 　となる。

n を負でない整数として、$f(x)=x^n$ 、a=-1、h=2 のとき規則が成立するような n を求めよ。

**4.34**　シンプソンの規則は、次数 3 を超えない任意の多項式について、成立することを示せ。

（略解）4.32　a+(1/2)h = -1+1 = 0、a+h = 1、

n = 0 のとき、$f(x) = x^0 = 1$ で、L = M = N = 1 、h = 2　I = 2 となり成立

n = 2m-1(奇数) のとき、L = -1、N = 1、M = I = 0 で成立

n = 2m(偶数) のとき、n = 2 のときのみ成立し、他は不成立

( $0^0$ が気になる？)

3.34　変数変換を行う。a → a−h、h → 2h、a+(h/2) → a、a+h → a+h

$f(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ として　・・・

$I = \cdots = 2f(a)h + 2\{pa + (q/3))\}h^3$

$\{(L + 4M + N)/3\}\cdot h = 2f(a)h + 2\{pa + (q/3))\}h^3$　よって成立

（関連事項として次を紹介します。）

4.35　立体解析幾何学と積分法を用いて、4.34 から 4.22 を導け。

（解は略。キチンと示すのは大変・・・）

第二部　一般的方法に向かって

＜問題、解説など＞

第５章　問　題　（テーマのみ紹介）

5.1　問題とは何か？　　5.2　問題の分類

5.3　決定問題　　5.4　証明問題

5.5　未知数の成分、条件の箇条　　5.6　手続きを求む

＜第５章の例題と注釈＞　（解などは後掲）

5.8　証明か決定か？　二数 $\sqrt{3} + \sqrt{11}$ と $\sqrt{5} + \sqrt{8}$ は等しいか？　等しくなければ、どちらが大きいか？

5.16　n 辺形を決定するには、 $\underbrace{(n-1)+(n-2)}_{①} = \underbrace{(n-3)+n}_{②} = \underbrace{3+2(n-3)}_{③} = \underbrace{2n-3}_{④}$ 個の独立なデータが必要である。①、②、③、④はぞれぞれ何を示唆するか。

5.17　底面が n 辺形の角錐を決定するには、何個のデータが必要か。

5.18　底面が n 辺形の角柱（斜角柱でもよい）を決定するには、何個のデータが必要か。

（解）5.8 （本には解答はない。）模範答案をつくってみてください。（答）$\sqrt{3}+\sqrt{11}<\sqrt{5}+\sqrt{8}$

5.16　（私の勝手な解釈も入れて）

①　１つの頂点を決め、他の頂点とを結ぶ n−1 個の線分の長さと、n−2 個の夾角の大きさ

②　n−3 本の対角線の長さと、n 個の辺の長さ

③　１頂点とはさむ２辺で一つの三角形を固定(3)、次々に対角線と辺で三角形を追加 2(n−3)

④　n 個の点の座標 (x,y) を決める（ 2n ）。x 座標、y 座標、回転の 3 自由度で 2n−3

5.17、5.18 ともに 2n 個　（一考（？）が必要です。再考も・・・。参考：(2n−3)+3 = 2n ）

第６章　スコープを拡げること　（その１）

（本文中から）　次の方程式を解け。 $(he)^2 = she$ 。he と she は 10 進法で書かれた正の整数で、前者は２桁、後者は３桁の数で、h、e、s は数字である。

（略解）（本の解説とは異なる。他にもいろいろやり方がある。）

he = N とおく。 $N^2 = 100s + N$ より $N^2 - N = 100s$ ∴ $N(N-1) = 25\cdot 4s$

N(N−1) は連続 2 整数の積で、片方は奇数。s = 1〜9 を調べて、s = 6 で N = 25、

$25^2 = 625$ （答）

＜第６章の例題と注釈＞（問題のみ予告。解は次回）

6.7　円内の与えられた一点を通って、与えられた長さを持つ弦を作図せよ。

6.8　二直線 a、b と一点 C の位置が与えられている。点 C を通る直線 x を引いて、直線 a、b、x によって作られる三角形の周の長さが与えられた ℓ になるようにせよ。

6.11　3 行の魔方陣（3×3 = 9個のマスで数字は 1 から 9 までの 9 個が入り、縦、横、斜のそれぞれ 3 個の和がすべて等しい）を求めよ。（魔方陣（例））

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 8 | 5 |
| ・ | ・ | ・ |
| ・ | ・ | ・ |

6.12　4 桁の数があり、9 倍すると並び順が逆になる。その数は何か。

6.13　数字 a、b、c、d について、ab × ba = cdc のとき、a、b、c、d を求めよ。ただし、2 桁の数 ab （すなわち 10a + b ）の各位の数 a、b は異なるものとする。

6.14　三角形には六つの部分（三辺と三角）がある。二つの合同でない三角形で、一方の三角形の五つの部分が他方の三角形の五つの部分に等しいようなものを見出すことができるか？

6.22　紙と鉛筆とを使わず、視察だけで、次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 30 \\ 2x + 3y + z = 30 \\ x + 2y + 3z = 30 \end{cases}$$

その解法が正しいことを示せ。

6.24　次の連立方程式を満たす、x、y、u、v を求めよ。

$$\begin{cases} y + u + v = 5 \\ x + u + v = 0 \\ x + y + v = -8 \\ x + y + u = 4 \end{cases}$$

早道はないか。