数学散歩　X-7　　　　　　　　　　２０２０．２．　α　　岐阜市　村山錞司

「数学の問題の発見的解き方 ポリア 柴垣和三雄、金山靖夫訳 みすず書房」　(7)

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

第二部　　一般的方法に向かって

＜問題、解説など＞

第６章　　スコープを拡げること　　（その２）

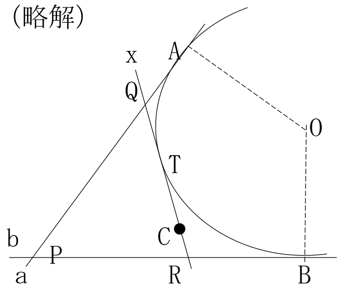
＜第６章の例題と注釈＞（問題は再掲）

6.7　円内の与えられた一点を通って、与えられた長さを持つ弦を作図せよ。

（略解、図略（図を描いて確認を））円 O の周上の一点 A から与えられた長さの弦 AB を引き、円の中心 O から弦に垂線 OH を下す。中心 O 、OH を半径とする円に与えられた点 C から接線を引けば、求める弦が得られる。

6.8　二直線 a、b と一点 C の位置が与えられている。点 C を通る直線 x を引いて、直線 a、b、x によって作られる三角形の周の長さが与えられた ℓ になるようにせよ。

（略解）



a、b の交点を P、a と b によって平面が 4 つに分けられるが、点 C を含む側で a、b 上に PA = PB = ℓ/2 となる点 A、B をとる。点 A、B でそれぞれ a、b に垂線を立て、交点を O とする。点 O を中心、半径を OA = OB とする円 O を描き、点 C を通り円 O への接線 x を引き、a、b との交点を Q、R、接点を T とする。

（△PQR の周の長さ）= PQ + QR + RP = PQ + (QT + TR) + PR
　= (PQ + QA) + (PR + RB) = PA + PB = ℓ

6.11　3 行の魔方陣（3×3 = 9個のマスで数字は 1 から 9 までの 9 個が入り、縦、横、斜のそれぞれ 3 個の和がすべて等しい）を求めよ。

（魔方陣（例））

2	8	5
・	・	・
・	・	・

（参考　「数学散歩　号外（魔方陣）　2019.10.γ」などで扱っている。）

（略解）

c	b	c
b	a	b
c	b	c

a は 4 方向
b は 2 方向
c は 3 方向

① a → 5
　b → 1、3、7、9
　c → 2、4、6、8

②

	1	
3	5	7
	9	ア

と

	1	
7	5	3
ア	9	

と回転

③ c からアに入るのは 2 のみ
　残りのマスは 15 との差で確定

(1+2+3+4+5+6+7+8+9)/3 = 45/3 = 15　縦、横、斜 の 3 個づつの数の和は、ともに 15 になる。数の組合せと可能な方向について、

＜和が 15 になる組合わせと可能な方向＞

数			方向数
1：	1+5+9、1+6+8	b	2
2：	2+4+9、2+5+8、2+6+7	c	3
3：	3+4+8、3+5+7	b	2
4：	2+4+9、3+4+8、4+5+6	c	3
5：	1+5+9、2+5+8、3+5+7、4+5+6	a	4
6：	1+6+8、2+6+7、4+5+6	c	3
7：	2+6+7、3+5+7	b	2
8：	1+6+8、2+5+8、3+4+8	c	3
9：	1+5+9、2+4+9	b	2

（例）

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6.12　4 桁の数があり、9 倍すると並び順が逆になる。その数は何か。

（略解）abcd × 9 = dcba で、a ≧ 2 として 9 倍すると 5 桁になるから a = 1、d = 9

　(1bc9) × 9 = 9081 + 900b + 90c
−)　9cb1　　= 9001 + 100c + 10b
　　0　　　 =　 80 + 890b − 10c

→ c = 89b + 8
より、b = 0、c = 8
求める数は、1089（答）

6.13　数字 a、b、c、d について、ab × ba = cdc のとき、a、b、c、d を求めよ。ただし、2 桁の数 ab（すなわち 10a + b）の各位の数 a、b は異なるものとする。

（略解）　$1 \leqq a < b \leqq 9$、$1 \leqq c \leqq 9$、$0 \leqq d \leqq 9$ とする。

表現をかえて、　$(10a + b)(10b + a) = 100c + 10d + c$

$100ab + 10(a^2 + b^2) + ab = 100c + 10d + c$

$a^2 + b^2 \geqq 10$ とすると、100 の位は ab + 1 = c となって、1 の位が ab = c と矛盾

よって、　$2 < a^2 + b^2 \leqq 9$　a = 1 として　$1 < b^2 \leqq 8$　∴ b = 2

12 × 21 = 21 × 12 = 252　　(a,b,c,d) = (1,2,2,5) と (2,1,2,5)（答）

6.14　三角形には六つの部分（三辺と三角）がある。二つの合同でない三角形で、一方の三角形の五つの部分が他方の三角形の五つの部分に等しいようなものを見出すことができるか？

（略解）三辺が等しい二つの三角形は合同だから、それ以外。三角が等しいときは二つの三角形が相似になる。ゆえに、三角が等しく、二辺が等しければよい。

二つの三角形の三辺の長さを、(a,b,c) と (b,c,d) とし $a \neq d$ とすれば、相似だから、

$b/a = c/b = d/c$ この値を k とすれば、a、$b = ak$、$c = bk = ak^2$、$d = ck = ak^3$

a、b、c、d は等比数列になる。例として、$a = 8$、$k = 3/2$ とすれば、8、12、18、27 で

二つの三角形の三辺の長さは、8、12、18 と 12、18、27 になる。

確認として、$8 + 12 = 20 > 18$、$12 + 18 = 30 > 27$ で、三角形はできる。

6.22　紙と鉛筆とを使わず、視察だけで、次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 30 \\ 2x + 3y + z = 30 \\ x + 2y + 3z = 30 \end{cases}$$

その解法が正しいことを示せ。

6.24　次の連立方程式を満たす、x、y、u、v を求めよ。

$$\begin{cases} y + u + v = -5 \\ x + u + v = 0 \\ x + y + v = -8 \\ x + y + u = 4 \end{cases}$$

早道はないか。

（略解）6.22 x、y、z について対称だから $x = y = z$ として、$6x = 30$、$x = 5$ より、$x = y = z = 5$（答）

（感想）「解法が正しいこと」とは何を指すのか不明？

6.24　4 つの式の両辺を加えて $3(x + y + u + v) = -9$、$x + y + u + v = -3$ より、$x = 2$、$y = -3$、$u = 5$、$v = -7$

（感想）「早道」はどんな道を辿るのだろうか？

第二巻　第二部　一般的方法に向かって（続き）

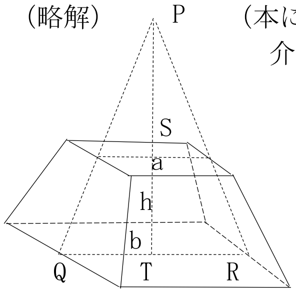
第二巻になり、理念的な内容や表現が多く、拾える題材も少なくて限られ、参考になりそうな事項をできるだけ拾って紹介するつもりですが、どうなることやら・・・？

第七章　解答の進行の幾何学的表示（7.1～7.12 から）

7.2　　問題は何か

底が正方形の直角垂台の体積 F を求めよ。台の高さ h、上底、下底のそれぞれの一辺の長さは a、b と与えられている。

（略解）



（本には、10 頁余りの教材分析や思考の推移などの解説があり、後に別解も紹介されている。）（図参照 判読してください。）

上底、下底の正方形の両側の二辺の中点同士を結び、中央を切断した二等辺三角形 PQR をつくり、上底、下底との交点を S、T とする。

$ST = h$、$PT = x$ とすると相似関係から $b : x = a : (x - h)$

$x = bh / (b - a)$

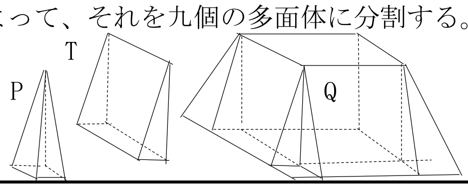
$F = b^2x/3 - a^2(x-h)/3 = \{(b^2-a^2)bh/(b-a) + a^2h\} / 3$

$= (a^2 + ab + b^2)h / 3$

＜第７章の例題と注釈＞（7.1～7.4 から）

（ 10 頁にわたって前掲の 7.2 「直角垂台の体積についての別解」を扱う。）

7.1（別の接近）　台の底は水平な平面内にある。台の上面の正方形の辺を通る四つの鉛直な平面によって、それを九個の多面体に分割する。



正方形の底を持つ体積 Q の一個の角柱

三角形の底をもつ各体積 T の四個の角柱

正方形の底をもつ各体積 P の四個の角錐

図によって示される接近に従って、F を求めよ。

（略解）　$Q = a^2h$、$T = \dfrac{b-a}{2} \cdot \dfrac{h}{2} \cdot a = \dfrac{(b-a) \cdot ah}{4}$

$$P = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{(b-a)^2 \cdot h}{12}$$

$$\therefore \quad F = a^2h + \frac{(b-a) \cdot ah}{4} \cdot 4 + \frac{(b-a)^2 \cdot h}{12} \cdot 4$$

$$= \cdots = \frac{(a^2 + ab + b^2)h}{3}$$（答）