「数学の問題の発見的解き方 ポリア 柴垣和三雄、金山靖夫訳 みすず書房」 ⑻

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

第二部　　一般的方法に向かって

＜問題、解説など＞

第８章　　計画とプログラム(8.1～8.6 から)

8.3　　一つのプログラム

二数 $\sqrt{3} + \sqrt{11}$ と $\sqrt{5} + \sqrt{8}$ とは等しいか？　等しくないなら、どちらが大きいか？

（前々回の「X-6」で扱っており、そこでは答のみ示している。）

（本の解説から）＝、＞、＜の妥当なものを ？ で表して、

$\sqrt{3} + \sqrt{11}$ ？ $\sqrt{5} + \sqrt{8}$

$3 + 2\sqrt{33} + 11$ ？ $5 + 2\sqrt{40} + 8$

$1 + 2\sqrt{33}$ ？ $2\sqrt{40}$

$1 + 4\sqrt{33} + 132$ ？ 160

$4\sqrt{33}$ ？ 27

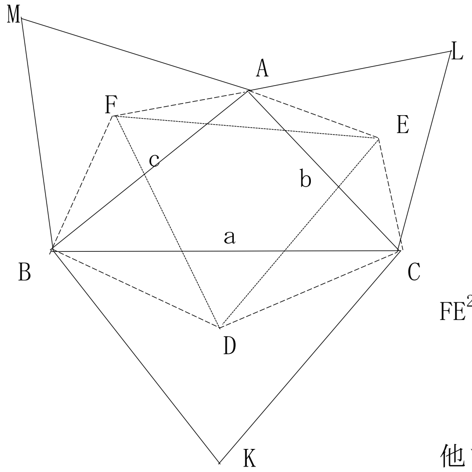
528 ？ 729

より、逆にたどって　$\sqrt{3} + \sqrt{11} < \sqrt{5} + \sqrt{8}$

（答案を書くとしたら、どのように・・・？）

8.4　　幾つかの計画からの選択

与えられた（任意の）三角形の各辺上に、この三角形の外側に、正三角形をえがき、それら三つの正三角形をの中心を結ぶと、正三角形になることを示せ。



（本には示されていないが、「ナポレオンの定理」といわれ、ネットで検索するといろいろあり、参考になります。過去に「数学散歩」でも・・・？）

（略証）　BC = a、CA = b、AB = c として、

$AF = c / \sqrt{3}$、$AE = b / \sqrt{3}$、　△ABC の面積を S 、

とすると、$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 、 $\sin A = \dfrac{2S}{bc}$

$\angle FAB = \angle EAC = 30°$ より、$\angle EAF = A + 60°$

$$FE^2 = AF^2 + AE^2 - 2\,AF \cdot AF \cdot \cos(A + 60°)$$

$$= \frac{c^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2bc}{3}(\cos A \cdot \cos 60° - \sin A \cdot \sin 60°)$$

$$= \cdots = \{(a^2 + b^2 + c^2) + 4\sqrt{3} \cdot S\} / 6$$

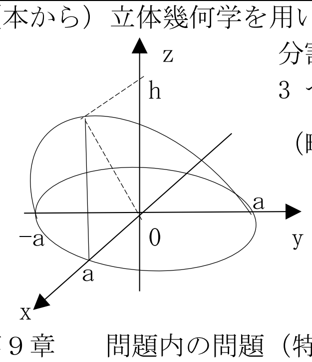
他も同様にして、DE = EF = FD で正三角形になる。

＜第８章の例題と注釈＞(8.1～8.8 から)

8.4　　三つの計画からの選択

a は直円筒の底の半径を、h は高さをあらわすとする。一平面が底を一つの直線に沿って切り、上面の周に接し（周と一点だけを共有し）、その円筒の体積を二つの不等な部分に分割する。底と分割平面との間にある小さい部分（蹄（ひづめ））の体積を計算せよ。

（本から）立体幾何学を用いる。円筒の軸は x 軸、底の周は　$x^2 + y^2 = a^2$ 、



分割平面の方程式は z/h = x/a 。

3 つの断面： x 軸に垂直、y 軸に垂直、z 軸に垂直　のどれを選ぶか。

（略解）$z = \dfrac{hx}{a} = \dfrac{h\sqrt{a^2-y^2}}{a}$　y軸に垂直な切断面の三角形の面積は

$$\frac{xz}{2} = \frac{hx^2}{2a} = \frac{h(a^2-y^2)}{2a}$$

$$V = 2\int_0^a \frac{h(a^2-y^2)}{2a}\,dy = \cdots = \frac{2}{3}a^2h \quad (答)$$

第９章　　問題内の問題（特記事項なし）

＜第９章の例題と注釈＞(9.1～9.15 から)

9.10　次の二つの問題を比較せよ（n は正の整数を表わす）：

A. 次の命題を証明（または反証）せよ： 2^n-1 が素数ならば、n は素数でなければならぬ。

B. 次の命題を証明（または反証）せよ： n が合成数ならば、2^n-1 は合成数でなければならぬ。

A、B の論理的関係は何か？　　A から B へ移ることに何か利点を求めるか？　　B を解け。

（考察 ― 本の解答から）

⑴　　A、B は対偶で同値

⑵　　n が合成数ならば、n = ab、a ＞ 1、b ＞ 1 である二つの整数 a、b がある。

⑶　（ B を示す）n = ab ならば、 $2^n-1 = 2^{ab}-1 = (2^a)^b-1$ は　2^a-1 で整除される。

（著者にとっては、当り前のことだと思うが、一瞬ドキッと・・・）

（∵） $2^{ab}-1 = (2^a-1)(2^{(b-1)a} + 2^{(b-2)a} + \cdots + 2^{2a} + 2^a + 1)$

第10章 アイデアの到来　　(61p～70p)　　　　第11章 頭の働き　　　(71p～88p)
第12章 頭の訓練法　　　　(89p～102p)　　　第13章 発見の規則？　(103p～114p)
（いずれの章も、数学教育の関係者の読み物として興味深い内容が多くあり、機会があれば一読を勧めたい。なお、「数学散歩」で紹介したい問題などには出会わなかったように思う。）

第１４章　学習、教授、および教授の学習について
（本論 115p～141p の中から気になった問題を一題）

四面体ABCD で、六つの辺 AB、BC、CA、AD、BD、CD の長さが与えられている。△ABC を四面体の底と見なして、底と他の三面を含む三つの二面角を、定木とコンパスで作図せよ。

（本から）・・・われわれは定木とコンパスを使って、問題の高さ、足および面を作図しなければならないのだ。・・・

図14.1 六つの辺から四面体を

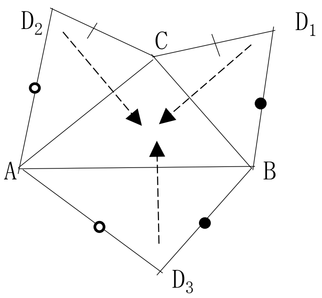


図14.2 出来上がったものの一様相（四面体の頂点D を底に射影した）

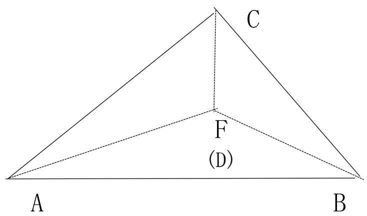


図14.3 三人の旅人の共通の目的地

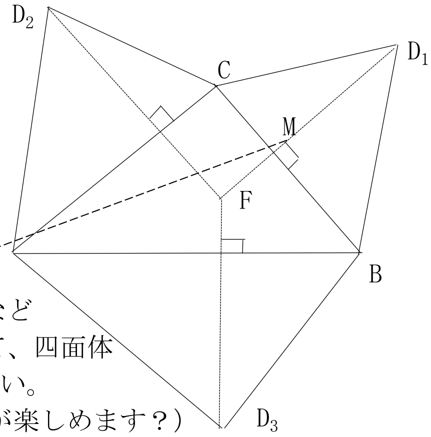
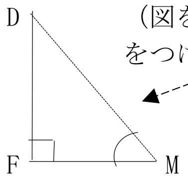
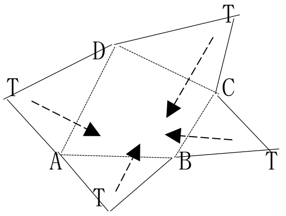


図14.4 あとはやさしい
(DF は四面体の高さ、
∠DMF は二面角)



（図を参考にして、厚紙に糊しろなどをつけた図をかき、ハサミで切って、四面体を実際に作ってみてください。
１時間ほど？のヒマツブシが楽しめます？）



（本にはないが、…からの質問）
各辺の長さを適当に与えて、一般的な四角錐 T-ABCD をつくれ。
（△TAB、△TBC、△TCD、△TDA の頂点 T が、
うまくくっつくかどうか、気になりますが？）

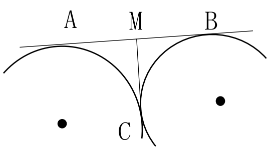
＜第１４章の例題と注釈＞(14.1～14.28 から)

14.24　$x^3 + x^5 + x^7 + x^{11} + x^{13} + x^{17} + x^{19}$ を $x^2 - 1$ で割ったときの余りを求めよ。

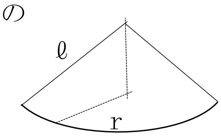
（久しぶりに見る問題でドッキリ！！、最初は直接、割り算をしました。筆算でどうぞ。）
（略解）　$f(x)$ = （与式） $= (x^2-1)\cdot h(x) + ax+b$ とすれば、$f(1) = a+b = 7$、$f(-1) = -a+b = -7$
　　　$a = 7$、$b = 0$　　余りは $7x$　（答）

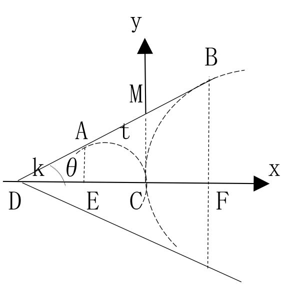
14.25　二つの球が接している。それらは、その接点を通る主共通接平面によって隔てられている。２球には、その共通接円錐を包む他の共通接平面が無数にある。この円錐は２球と一つの円に沿って接触し、これら二円の間にある円錐の部分は、一つの台の側面である。台の斜高 t が与えられたとき、次を求めよ。⑴　台の側面積　⑵　「主」接平面の、接円錐内にある部分の面積

（本文の中にはヒントらしきのはない。解答にも、⑴　πt^2 、⑵　$\pi t^2/4$ とあるだけである。もっと他の簡単なやり方もあると思うが、答に至る経過も含め記述する。間違いなどあればご指摘を）
（略解）⑵(を先に示す) 左図は２球の中心を通る平面で切断したもので、２球の接点が C 、



A、B は２つの球と接円錐との接点で、AM = MC = MB = t/2 (M は AB の中点)
よって求める図形は、中心 C 、半径 t/2 の円だから、面積は
　$\pi t^2 / 4$　（答）
（補題）　底円の半径が r 、側線の長さが ℓ の円錐の
　側面積は、　$\pi \ell^2 \cdot \dfrac{2\pi r}{2\pi \ell} = \pi \ell r$





⑴（に戻って）＜xy 平面を断面に＞
台の中心線を x 軸とし、AB と x 軸との交点を D、なす角を θ 、AD = k、
$AE = k\cdot\sin\theta$ 、$DB = t+k$、$BF = (t+k)\cdot\sin\theta$ 、
補題より、台形EABF を x 軸の周りに回転した台の側面積は、

$$\pi(t+k)^2\cdot\sin\theta - \pi k^2\cdot\sin\theta$$
$$= \pi t\cdot 2\cdot(k + t/2)\sin\theta$$
$$= \pi t^2 \quad (\because\ (k + t/2)\sin\theta = MD\cdot\sin\theta = MC = t/2\ )$$