「正の整数 n を、連続する正整数の和として表示する仕方の数を $t(n)$ で表す」

(例) $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ 2 通りで、 $t(10) = 2$

$15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ 4 通りで、 $t(15) = 4$

問 台形表示の数 $t(7)$ 、 $t(9)$ を求めよ。

(略解) $7 = 3 + 4$ で $t(7) = 2$ 、 $9 = 4 + 5 = 2 + 3 + 4$ で $t(9) = 3$

15.49 (改題：適当にまとめた) <正の整数 n の r 行台形表示>

$$n = a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (a+r-1) = r \cdot (2a + r - 1) / 2 \cdots (\ast)$$

(r 個 (行) の和：初項 a (正整数)、公差 1、連続 r 個の整数の和)

<本の解答から参考になる事項をまとめる>

(1) ($\ast$) の分母を払って、 $2n = r \cdot (2a + r - 1)$

(2) (1)の右辺の二つの因数は、 r と $2a + r - 1$ ($r < 2a + r - 1$) で

r が奇数なら $2a + r - 1$ は偶数で、 r が偶数なら $2a + r - 1$ は奇数。

(3) 二つの因数の小さい方が r (和の個数 (台形表示の行数))

(4) n と r が与えられれば、 a (初項) は一意的に決まる。

(2)によって、二因数 r と $2a + r - 1$ を考えることになる。)

問 (検討課題として) - 本の解答から

(A) p が奇数の素数のとき $t(p) = 2$

(B) $t(n)$ は整数 n の奇数の約数の数に等しい。

(A) (略解) $p = 2k - 1 = (k-1) + k$ より、 $t(p) = 2$

(B) (本の解答から) $\cdots$ **$t(n)$ は整数 n の奇数の約数の数に等しい** という規則を発見するには $\cdots$ 多少の鋭敏さが必要であるかも知れない。読者はこの規則を証明すべきである。 $\cdots$ として、(1)~(4)を示してはいるが、証明の記述はない。

問 <次項の準備として> $n = 2 \times 3 \times 5 = 30$ として、 $t(30)$ について考察せよ。

(略解) 30 の奇数の約数は、1、3、5、15 だから、 $t(30) = 4$

$$2n = 60 = 1 \times 60 = 3 \times 20 = 4 \times 15 = 5 \times 12 \quad (\text{注}) 2 \times 30 \text{ はともに偶数で不可}$$

$$r = 1 \quad 60 = 1 \cdot (2a + 1 - 1) \quad \therefore a = 30 \text{ で} \quad 30 = 30$$

$$r = 3 \quad 60 = 3 \cdot (2a + 3 - 1) \quad \therefore a + 1 = 10, a = 9 \text{ で} \quad 9 + 10 + 11 = 30$$

$$r = 4 \quad 60 = 4 \cdot (2a + 4 - 1) \quad \therefore 2a + 3 = 15, a = 6 \text{ で} \quad 6 + 7 + 8 + 9 = 30$$

$$r = 5 \quad 60 = 5 \cdot (2a + 5 - 1) \quad \therefore 2a + 4 = 12, a = 4 \text{ で} \quad 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$$

<検討課題 (B) > 「異なる二つの奇素数 p 、 q の積 $p \cdot q = n$ について $t(n)$ は？」

(考察) ① $n = p \cdot q$ の約数は、1、 p 、 q 、 pq だから $t(n) = t(pq) = 4$

② ((1)、(2)の確認 ($2n = r \cdot (2a + r - 1)$ 、 $r < 2a + r - 1$))

$2n = 1 \cdot 2pq = 2 \cdot pq = p \cdot 2q = 2p \cdot q$ または $q \cdot 2p$ により、

$$r = 1 \quad 2a + 1 - 1 = 2pq, a = pq$$

$$r = 2 \quad 2a + 2 - 1 = pq, a = (pq-1)/2, a+1 = (pq+1)/2 \text{ だから、} \frac{(pq-1)/2 + (pq+1)/2}{2} = pq$$

$$r = p \quad 2a + p - 1 = 2q, a = q - \frac{p}{2} + \frac{1}{2}, a+1 = q - \frac{p}{2} + \frac{3}{2}, \cdots,$$

$$a+p-1 = q + \frac{p}{2} - \frac{1}{2} \text{ だから } p \text{ 個の和は}$$

$$\left(q - \frac{p}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left(q - \frac{p}{2} + \frac{3}{2} \right) + \cdots + \left(q + \frac{p}{2} - \frac{1}{2} \right) = pq$$

(次に、 $2p$ と q との大小について分けて考察)

(イ) $q < 2p$ のとき、 $r = q$ 、($r = p$ と同様に) q 個の和は、

$$\left(p - \frac{q}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left(p - \frac{q}{2} + \frac{3}{2} \right) + \cdots + \left(p + \frac{q}{2} - \frac{1}{2} \right) = pq$$

(ロ) $2p < q$ のとき、 $r = 2p$

$$2a + 2p - 1 = q, a = \frac{q}{2} - p + \frac{1}{2}, a+1 = \frac{q}{2} - p + \frac{3}{2}, \cdots,$$

$$a+2p-1 = \frac{q}{2} + p - \frac{1}{2} \text{ だから } 2p \text{ 個の和は}$$

$$\left(\frac{q}{2} - p + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{q}{2} - p + \frac{3}{2} \right) + \cdots + \left(\frac{q}{2} + p - \frac{1}{2} \right) = pq$$

<残る課題として> 「(B) $t(n)$ は整数 n の奇数の約数の数に等しい。」の一般的な考察