数学散歩　Ⅸ－29　　　　　　　２０１９．４．　α　　岐阜市　村山錞司

問題づくりの参考に　　：PART　7

「フェルマーの最終定理　：　$x^n+y^n=z^n$ (n≧3)は自然数解 x、y、z をもたない。」④

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

なお、参考までに、不明な単語、疑問点などｲﾝﾀｰﾈｯﾄで検索すると、ｿﾞﾛｿﾞﾛ 出てきます。

貴方のお名前を検索されると、ひょっとして、ビックリ？？？かも知れません。

「炎上弁護士 なぜ僕が100万回の殺害予告を受けることになったのか

唐澤貴洋 日本実業出版社 (2018.12.20 初版発行)」

先日、市立図書館で大変な内容の上記の本に出合いました。機会がありましたらご一読を。
参考として目次から少し拾ってみますと、・・・ｲﾝﾀｰﾈｯﾄが凶悪犯罪の温床に・・・
・・・未成年者のｲﾝﾀｰﾈｯﾄの使い方・・・それでも僕は人を救いたい・・・

(「Ⅸ-特別参加 Part2」の訂正　$\sqrt{2}$=[1;222…]、$\sqrt{3}$=[1;1212…]　点検をよろしく)

＜記事、問題など＞

Ｂ　フェルマーの大定理が解けた！　足立恒雄　講談社　　その１

BLUE BACKS の本で、本のｶﾊﾞｰの裏側に次の記載があり、それにひっかかって？20 年ほど前に購入したが、本棚に積んどくだけの本だった。もったいなく思い手にとってみたが、後半については、消化不良の部分がほとんどで、拾い読み、流し読みで終わった。いろいろｽﾄﾚｽがたまる本だった。参考になりそうな記事、問題など適当に選び、解釈し、まとめてみた。

> 数式を拾って読んでも、よく分かる！
> 飛ばして読めば、モットよく分かる！
> 第１章　ﾌｪﾙﾏｰの大定理とは？
> 第２章　古代から伝えられた方法
> 第３章　ﾌｪﾙﾏｰと楕円曲線
> ・・・・・

(本から適当に記事などを抜き出し)

- ﾌｪﾙﾏｰ(P.de.Fermat 1601-1665) 17世紀を代表するﾌﾗﾝｽの数学者・・・数論の始祖でも・・・
- ﾃﾞｨｵﾌｧﾝﾄｽ(Diophantus 250頃)　ｷﾞﾘｼｬの数学者、方程式の有理数解を求める分野を・・・
- ﾊﾞｼｪ(C.G.Bachet 1581-1638)　ﾌﾗﾝｽの貴族で、趣味としてﾊﾟｽﾞﾙの研究を行った。・・・

ﾌｪﾙﾏｰは1630年代のあるとき、・・・ﾃﾞｨｵﾌｧﾝﾄｽが著したﾊﾞｼｪ版『算術』という数論の書物を読み、気付いたことを欄外の余白に書き込んでいった。その中に・・・

「$x^n+y^n=z^n$ (n≧3)は自然数解 x、y、z をもたない。」(本によれば)

- n = 4 の場合はﾌｪﾙﾏｰ自身によって証明が与えられている(1630年頃)。
- n = 3 の場合はｵｲﾗｰによって証明された(1770)。
- n = 5 の場合はﾃﾞｨﾘｸﾚとﾙｼﾞｬﾝﾄﾞﾙによって証明された(1820)。
- ｸﾝﾏｰ(E.E.Kummer 1810-1893) は・・・100以下の指数nではﾌｪﾙﾏｰの大定理が成り立つことを含む一般的な定理を証明した。
- 「すべての場合に」ﾌｪﾙﾏｰの大定理が成り立つことが今年(1955年)、ﾜｲﾙｽﾞ(A.Wiles 1953-)というｲｷﾞﾘｽ人によって最終的に証明された。　(ここの部分、証明のﾋﾝﾄなどゼロ。)

(ﾃﾞｨｵﾌｧﾝﾄｽの「算術」から。以下、「「算術」の問題番号)

第２巻問題１０　与えられた数が二つの平方数の和であるとき、これを別の二つの平方数の和に分けよ。(注　数とは正の有理数をいう。書き直して)

> 問題２　a を与えられた正の有理数とする。円 $x^2+y^2=a$ 上に一つの有理点が与えられたとき、他の有理点を求めよ。　(答は、後掲)　(参考　問題１は円 $x^2+y^2=a^2$)

(本文から) これらの問題を解くことによって、一般に２次曲線上には有理点が全く存在しないか、あるいは存在する場合は無数に存在することが、鋭敏な読者には見てとることができたに違いない。

> ＜鋭敏な？読者の皆さんへ私からの問題＞２次曲線上には有理点が全く存在しないか、あるいは、無数に存在する、それぞれの例をあげてください。

第４巻問題４５　(本による、現代的な記号法で改変)

> 問題３　$\begin{cases} 8x+4=u^2 & \cdots① \\ 6x+4=v^2 & \cdots② \end{cases}$　有理数の範囲で、付帯条件 $0<x<2$ …③ のもとで解け。

(本では)・・・実際の計算は読者の演習問題としよう。(影の声：温かいご配慮です。)

＜ﾋﾟﾀｺﾞﾗｽ数＝本ではﾋﾟｭﾀｺﾞﾗｽ数 ― $x^2+y^2=z^2$ を満たす自然数の組 (x,y,z)＞

一般解の求め方はいろいろあるが、本を参考にして、

。 x、y は互いに素とする。→いずれか一方は偶数、他方は奇数で、z は奇数になる。

(∵) ともに偶数にはならない。ともに奇数とすると、　$x=2m+1$、$y=2n+1$　で

$x^2+y^2=4(m^2+n^2+m+n)+2$　　z^2 は z が偶数なら 4 の倍数で奇数なら奇数になり不可。

したがって、一方は偶数、他方は奇数で、z は奇数になる。

y を偶数とし、$y = 2Y$　$Y^2 = \dfrac{z^2 - x^2}{4} = \dfrac{z+x}{2} \cdot \dfrac{z-x}{2}$

z、x は互いに素だから、　$\dfrac{z+x}{2}$、$\dfrac{z-x}{2}$ も互いに素で、積が y^2 だから
ともに平方数になり、

$\dfrac{z+x}{2} = m^2$、$\dfrac{z-x}{2} = n^2$ より、　$z = m^2+n^2$　、　$x = m^2-n^2$　、　$y = 2mn$

よって、　$(x, y, z) = (m^2-n^2, \ 2mn, \ m^2+n^2)$

公約数 d があるとすれば、　$(x, y, z) = (d(m^2-n^2), \ 2dmn, \ d(m^2+n^2))$

◦　ﾌｪﾙﾏｰとﾃﾞｶﾙﾄの接線の大論争

ﾌｪﾙﾏｰの方法　：　極限を使って接線の傾きを求める

ﾃﾞｶﾙﾄの方法　：　代数方程式の重根から接線を定める

・・・当時はまだ微積分学が確立していなかったために・・・

◦　数学的帰納法はパスカルによって定式化された。

（ﾊﾟｽｶﾙは、その論証能力という点において際立っていただろう・・・）

「ﾍﾟﾙ(Pell:人名) 方程式」　その１

（本の気になる一文）「・・・現在**誤って**ﾍﾟﾙ方程式と呼ばれている問題・・・」
どこがどう誤っているのか記述や説明がこの本には全くない。気になってｲﾝﾀｰﾈｯﾄで検索したら「ｵｲﾗｰが不注意で呼んだ」との記述があった。

ﾍﾟﾙ方程式：　A を 1 以外の平方数で割り切れない自然数とするとき、 $x^2 - Ay^2 = 1$ の自然数解をすべて求めよ。

―　ﾌｪﾙﾏｰがｲｷﾞﾘｽの数学者たちに向かっての挑戦状の中の問題　―　とのこと

ｲｷﾞﾘｽの数学者（ｳｫﾘｽ、ﾌﾞﾗﾝｶｰ）が送ってきた有理数解（自然数ではない）

$x = \dfrac{2mn}{An^2-m^2}$、　$y = \dfrac{An^2+m^2}{An^2-m^2}$　（本では、何故かこのように x、y が逆になっている。）

他の本では、ペル方程式：　$x^2 - Dy^2 = \pm 1$（D は整数）の形の不定方程式のこと

＜解答、解説など＞

問題２　a を与えられた正の有理数とする。円 $x^2+y^2= a$ 上に一つの有理点が与えられたとき、他の有理点を求めよ。

（解）円上の一つの有理点を $P(p, q)$ とする。点 P を通る直線を $y = t(x-p)+q$ とし、円との他の交点を求める。　$x^2+t^2(x-p)^2+2tq(x-p)+q^2 = a$、　$p^2+q^2 = a$　より、

$(x-p)\{(x+p)+t^2(x-p)+2tq\} = 0$　　$x \neq p$ より　　$(t^2+1)x = (t^2-1)p-2tq$

$x = \dfrac{(t^2-1)p-2tq}{t^2+1}$、　$y = \dfrac{-(t^2-1)q-2tp}{t^2+1}$

t に有理数を入れれば、点 (x, y) は有理点になる。

＜私の問題＞２次曲線上には有理点が全く存在しないか無数に存在する、それぞれ例をあげよ。

（間違っているかもしれません？）

（存在しない例）　$x^2+y^2 = \sqrt{2}$　あるいは別の例として、　$x^2+y^2 = 3$

（無数に存在する例）　前記の問題２の解など

問題３　$\begin{cases} 8x+4 = u^2 & \cdots ① \\ 6x+4 = v^2 & \cdots ② \end{cases}$　有理数の範囲で、付帯条件 $0<x<2$ …③ のもとで解け。

「解け」とは何を求めるのか不明 → まずは、有理数解の組 (u, v) を求めることにする。

（解）　$x = \dfrac{u^2-4}{8} = \dfrac{v^2-4}{6}$　より　$\underline{4v^2-3u^2 = 4}$ …④　　（④は双曲線）

$(u, v) = (2, 2)$ は④を満たすが、①、②より $x = 0$ となって③より不適。

問題２と同様に、$v = t(u-2)+2$ …⑤　④に代入し整理して、

$4t^2(u-2)^2+16t(u-2)-3u^2+12 = 0$ より　$(u-2)\{4t^2(u-2)+16t-3(u+2)\} = 0$

$u-2 \neq 0$ として　$u = \dfrac{8t^2-16t+6}{4t^2-3} = -\dfrac{4(4t-3)}{4t^2-3} + 2$ …⑥

$v = -\dfrac{4t(4t-3)}{4t^2-3} + 2$ …⑦　　これから、x を求めると、

$v+2 = -\dfrac{4t(4t-3)}{4t^2-3} + 4$　、　$v-2 = -\dfrac{4t(4t-3)}{4t^2-3}$

$x = \dfrac{v^2-4}{6} = \dfrac{1}{6}\left\{\dfrac{16t^2(4t-3)^2}{(4t^2-3)^2} - \dfrac{16t(4t-3)}{4t^2-3}\right\} = -\dfrac{8t(t-1)(4t-3)}{(4t^2-3)^2}$

（ $0<x<2$ となる有理数 t の範囲を求めればよいと思うのだが・・・）