数学散歩　Ⅸ－30　　　　　　　２０１９．４．　β　　岐阜市　村山錞司

問題づくりの参考に　　：PART　7

「フェルマーの最終定理 ： $x^n+y^n=z^n$ (n≧3)は自然数解 x、y、z をもたない。」⑤

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜余談＞　「人に教えたくなる数学 根本生也 ｻｲｴﾝｽ・ｱｲ新書」から
一辺の長さが等しい正多面体（正四面体、立方体、正八面体、正十二面体、正二十面体）のうちでどれが一番大きいか。(参考：同じ一辺の上に、正三角形、正方形、正五角形を描いてジーッと眺めると・・・　　答は最後に)

＜角の三等分・追加＞「Ⅸ－特別参加 Part2 2019.3」の前に「Ⅸ-9 2018.6.α」でも扱っています。そこでは、正１７角形の作図問題も・・・頭がおかしくなるかも知れませんが？

＜記事、問題など＞

Ｂ　フェルマーの大定理が解けた！　足立恒雄　講談社　　その２

「ペル方程式」　その２

ﾍﾟﾙ方程式：　A を 1 以外の平方数で割り切れない自然数とするとき、 $x^2 - Ay^2 = 1$ の自然数解をすべて求めよ。

(本には詳しい？説明はなし)　$(x,y) = (1,0)$ が解だから、　$y = t(x-1)$ を代入して、

$x^2-1 = At^2(x-1)^2$　　$x \neq 1$ より、　$At^2(x-1)= x+1$

$\therefore\ x = \dfrac{At^2+1}{At^2-1}$、$y = \dfrac{2t}{At^2-1}$　　$t = \dfrac{n}{m}$　とすれば、

$x = \dfrac{An^2+m^2}{An^2-m^2}$、$y = \dfrac{2mn}{An^2-m^2}$　　m、n 整数とすれば、有理数解が得られる。(1,0) などあるが自然数解とは限らない。

＜ﾌｪﾙﾏｰの与えている自然数解の例として＞
$x^2 - 61y^2 = 1$　の最小の自然数解は、x = 1766319049　、 y = 226153980

桁数が多く、私の能力不足で、電卓やExcellでは検算できなかった。

ﾌｪﾙﾏｰはどうやって解を得たのかについての説明はなく、

(本には)　・・・ペル方程式の自然数解は連分数展開という技術を用いて得るべきもので・・・

（とあるだけで、ﾋﾝﾄや連分数関連などの記述はない。）

・・・実際は前に記したように 61 のときには y は 9 桁の数になるし、109 のときはなんと y は 14 桁の数になるのである。・・・(中略)・・・これはﾌｪﾙﾏｰが一般的解法を知っていたことを示すと同時に、意地悪な性格の持ち主だったことも暗示しているようで・・・

(私の感想：この本の著者も、中途半端な説明など意地悪（？）でいろいろｽﾄﾚｽが私も・・・)

＜ペル方程式と連分数展開＞　いろいろやってみたが、

(参考　「Ⅴ-9 2017.1 α、Ⅸ-17 2018.10 α、Ⅸ-21 2019.1 α」、参考書 青春の日の数学ｾﾐﾅｰ)

「 a に比べて b が小さいときの $\sqrt{a^2+b}$ の近似値（連分数表示）について」

$\sqrt{a^2+b}$ ：(1)　$a + \dfrac{b}{2a}$　(2)　$a + \dfrac{b}{2a + \dfrac{b}{2a}}$　(3)　$a + \dfrac{b}{2a + \dfrac{b}{2a + \dfrac{b}{2a}}}$

・・・・・・・・・・・

(例１) a = 1、b = 1 として

$\sqrt{2}$ ：(1)　$1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} = 1.5$　(2)　$1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2}} = \dfrac{7}{5} = 1.4$

(3)　$1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2}}} = \dfrac{17}{12} = 1.416\cdots$

(例２) a = 2、b = -1 として

$\sqrt{3}$ ：(1)　$2 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{4} = 1.75$　(2)　$2 - \dfrac{1}{4 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{26}{15} = 1.73\cdots$

(3)　$2 - \dfrac{1}{4 - \dfrac{1}{4 - \dfrac{1}{4}}} = \dfrac{97}{56} = 1.732\cdots$

(例３) a = 2、b = 1 として（途中略）

$\sqrt{5}$ ：(1)　$\dfrac{9}{4} = 2.25$　(2)　$\dfrac{38}{17} = 2.235\cdots$　(3)　$\dfrac{161}{72} = 2.2361\cdots$

(例４) a = 3、b = 1 として（途中略）

$\sqrt{10}$　：（1）　$\dfrac{19}{6} = 3.16\cdots$　　（2）　$\dfrac{117}{37} = 3.162\cdots$　（3）　$\dfrac{721}{228} = 3.162\cdots$

・　（例４）とペル方程式 $x^2 - 10 \cdot y^2 = \pm 1$ との関連

$$x = \sqrt{10 \cdot y^2 \pm 1} \quad、\quad \frac{x}{y} = \sqrt{10 \pm \frac{1}{y^2}} \fallingdotseq \sqrt{10}$$

$19/6$ ： $19^2 - 10 \cdot 6^2 = 361-360 = 1$、　　$117/37$ ： $117^2 - 10 \cdot 37^2 = 13689-13690 = -1$、
$721/228$ ： $721^2 - 10 \cdot 228^2 = 519841-519840 = 1$、

・　$t = \sqrt{a^2 + b}$　と連分数

$t^2 - a^2 = (t+a)(t-a) = b$　より、　　$t-a = b/(t+a)$

$$\underline{t} = a + \frac{b}{a+\underline{t}} = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a+t}}} \quad\text{…}$$

$$= a + \cfrac{b}{a + a + \cfrac{b}{a+t}} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{a+\underline{t}}} = \cdots$$

◦　ﾌｪﾙﾏｰの「書き込み」の問題から・・・１題

幾つかの問が紹介されているが、どの問にもｷﾁﾝとした答や証明などはついていない。

４で割ると１余る素数は二つの自然数の平方和として、ただ一通りの方法で表せる。

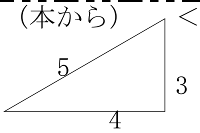
（例）　$5 = 1^2+2^2$　、　$13 = 2^2+3^2$、　$17 = 1^2+4^2$、　$29 = 2^2+5^2$、　$37 = 1^2+6^2$、　$41 = 4^2+5^2$、・・・

（本によれば）・・・有名な定理である。・・・とあるが、定理というからには、証明があるはずで、できればその方法やﾋﾝﾄなど、知りたいものである。

（少しやってみた ： $(2m)^2+(2n+1)^2 = 4(m^2+n^2+n)+1$　　は 4 で割ると 1 余り・・・？）

合同数 n ： 直角三角形で、三辺の長さが有理数で面積が自然数 n となるような数 n 。

（本から）　＜合同数 6 ＞　　　　＜合同数 5 ＞　ﾌｨﾎﾞﾅｯﾁの定理（1220 年頃）



面積 6

三辺の長さ　$x = \dfrac{9}{6}$、　$y = \dfrac{40}{6}$、　$z = \dfrac{41}{6}$

直角三角形で、面積 5 になる。

合同数 6 の場合と合同数 5 の場合についてどうやって求めるかについて考察する。

（考察）(A)　直角三角形の三辺は、d、m、n　(m＞n) を自然数として、

$(x,y,z) = (\ d(m^2-n^2)\ ,\ 2dmn\ ,\ d(m^2+n^2)\ )$　　d は三辺の（最大）公約数

(B)　奇数の平方は、連続する二つの自然数の平方の差に等しい。

（∵）　$(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = \{(2n^2+2n+1)+(2n^2+2n)\} \cdot \{(2n^2+2n+1)-(2n^2+2n)\}$
$= (2n^2+2n+1)^2 - (2n^2+2n)^2$

公約数 d = 1 、m、n は有理数として対応し、最後に d で面積を調整する。

$(x,y,z) = (\ m^2-n^2\ ,\ 2mn,\ m^2+n^2\ )$　　　面積　$S = mn\ (m^2-n^2)$

＜合同数 6 の場合＞　　m = 2、n = 1 とすれば、三辺は 3、4、5 で面積は 6

＜合同数 5 の場合＞　　面積　$S = mn\ (m^2-n^2) = 5$ だから　m、n、m^2-n^2　のどれかは 5 の倍数

m = 5 とすると　$S = 5n\ (5^2-n^2) = 5$　、　$5^2 = 3^2+4^2$ で　$5^2-4^2 = 3^2$　$(= m^2-n^2)$

n = 4 として　　三辺は、9、40、41　面積　$S = 20 \cdot 3^2 = 5 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 5 \cdot 6^2$

三辺の長さ　$x = \dfrac{9}{6}$、　$y = \dfrac{40}{6}$、　$z = \dfrac{41}{6}$　　面積　S = 5

問　　合同数 5 の場合を参考にして、合同数 7 の三角形の三辺を求めよ。

本の後の方（192頁～）にﾊﾞｰﾁ=ｽｳｨﾝﾅﾄﾝﾀﾞｲｱ予想とかﾅﾝﾄｶが書いてあり、・・・予想が正しいと仮定すれば $n \equiv 5、6、7 \pmod 8$ なる自然数 n は合同数であるというおもしろい結論が得られる。・・・7 も合同数なのだから、・・・これをみつけるのを<u>読者の宿題</u>にしておこう。・・・

（合同数が 5 を参考に、Excell の表計算を利用して楽しみ（苦しみ？）ました。）

（解）　面積　$S = mn\ (m^2-n^2) = 7$ だから　m、n、m^2-n^2　のどれかは 7 の倍数だとよい

m = 7 の場合　　$n \leqq 6$　　n = 6、5、4、・・・　いずれも不可

n = 7 とすると　$S = 7m\ (m^2-7^2)$

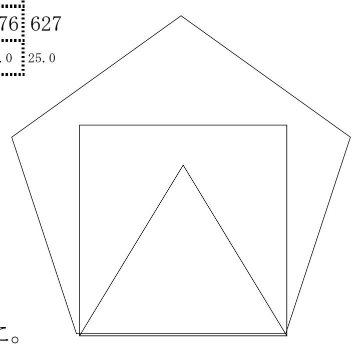
m	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
m^2-7^2	15	32	51	72	95	120	147	176	207	240	275	312	351	392	435	480	527	576	627
$\sqrt{\ }$	3.9	5.7	7.1	8.5	9.7	11.0	12.1	13.3	14.4	15.5	16.6	17.7	18.7	19.8	20.9	21.9	23.0	24.0	25.0

m = 25 とすると、　$25^2-7^2 = 24^2$

三辺は、　$25^2-7^2 = 24^2 = 576$　、$2 \cdot 25 \cdot 7 = 350$　、　$25^2+7^2 = 674$

面積は、　$7 \cdot 25 \cdot 24^2 = 7 \cdot (5 \cdot 24)^2 = 7 \cdot 120^2$

120 で割って　$\dfrac{576}{120}$、$\dfrac{350}{120}$、$\dfrac{674}{120}$、　面積　S = 7



＜余談の答について＞　大きさとは？　体積と考えて・・・（計算できませんが）

正十二面体＞正二十面体＞立方体＞正八面体＞正四面体　（右図を参考に）

前の２つはボール紙でヒマツブシに（？）つくったこともあり、実感しました。