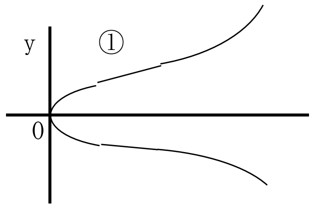
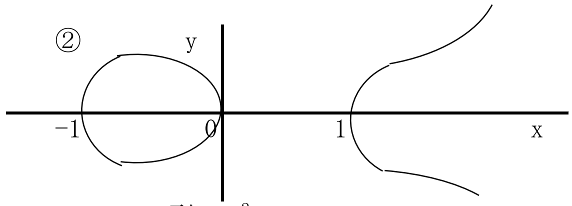
（別紙）　「$y^2 = x^3 + ax + b$ のグラフ（概念図）」　　y^2 $(= \pm y)^2 = f(x)$ で x 軸対称

＜① $y^2 = x^3 + x = x(x^2 + 1)$＞　　１型　$y^2 = (x - \alpha)(x^2 + px + q)$

x	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.35	0.39	0.4	0.41	0.5	1	2	3	7	10
x^3+x	0.01	0.05	0.101	0.208	0.327	0.393	0.449	0.464	0.479	0.625	2	10	30	350	1010
$3x^2+1$	1	1.008	1.03	1.12	1.27	1.368	1.456	1.48	1.504	1.75	4	13	28	148	301
y	0.1	0.224	0.318	0.456	0.572	0.627	0.67	0.681	0.692	0.791	1.414	3.162	5.477	18.71	31.78
y'	5.001	2.25	1.62	1.228	1.11	1.091	**1.086**	**1.086**	1.087	1.107	1.414	2.055	2.556	3.955	4.736



楕円曲線
$y^2 = x^3 + ax + b$
（$x^3 + ax + b = 0$ は
重根をもたない）
に双有理な曲線

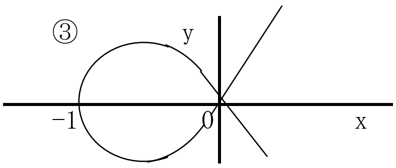


＜② $y^2 = x^3 - x = x(x + 1)(x - 1)$＞　　２型　$y^2 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$

x	−0.99	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.59	−0.58	−0.57	−0.3	−0.01	1.01	1.3	1.5	1.6	5
x^3-x	0.02	0.171	0.288	0.357	0.384	0.385	0.385	0.385	0.273	0.01	0.02	0.897	1.875	2.496	120
$3x^2-1$	1.94	1.43	0.92	0.47	0.08	0.044	0.009	−0.03	−0.73	−1	2.06	4.07	5.75	6.68	74
y	0.14	0.414	0.537	0.597	0.62	0.62	0.62	0.62	0.522	0.1	0.142	0.947	1.369	1.58	10.95
y'	6.912	1.729	0.857	0.393	0.065	0.036	**0.007**	−0.02	−0.7	−5	7.23	2.149	**2.1**	2.114	3.378

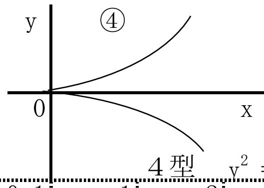
＜③ $y^2 = x^3 + x^2 = x^2(x + 1)$＞　　３型　$y^2 = (x - \alpha)^2(x - \beta)$

x	−0.99	−0.9	−0.8	−0.67	−0.65	−0.6	−0.59	−0.34	−0.14	−0.01	0.1	1	2	5	10
x^3+x^2	0.01	0.081	0.128	0.148	0.148	0.144	0.142	0.075	0.016	1E−04	0.011	2	12	150	1100
$3x^2+2x$	0.96	0.63	0.32	0.007	−0.03	−0.12	−0.14	−0.33	−0.22	−0.02	0.23	5	16	85	320
y	0.099	0.285	0.358	0.385	0.385	0.379	0.377	0.273	0.126	0.01	0.105	1.414	3.464	12.25	33.17
y'	4.85	1.107	0.447	**0.009**	−0.04	−0.16	−0.19	−0.61	−0.86	−0.99	1.096	1.768	2.309	3.47	4.824



原点は結節点
（特異点の一種、
接線が２本以上引ける）

③、④は楕円曲線ではない。



原点は尖点
（特異点の一種）

＜④ $y^2 = x^3$＞　　４型　$y^2 = (x - \alpha)^3$

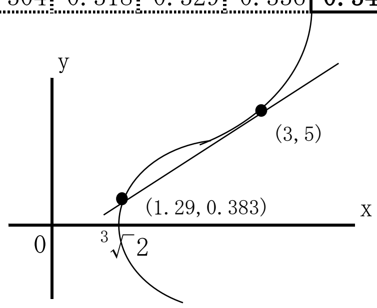
x	0.001	0.01	0.1	1	2	3	4	5	10
x^3	1E−09	1E−06	0.001	1	8	27	64	125	1000
$3x^2$	3E−06	3E−04	0.03	3	12	27	48	75	300
y	3E−05	0.001	0.032	1	2.828	5.196	8	11.18	31.62
y'	0.047	0.15	0.474	1.5	2.121	2.598	3	3.354	4.743
y"	23.72	7.5	2.372	0.75	0.53	0.433	0.375	0.335	0.237

「新しい有理点を求めるバシェの方法」

＜$y^2 = x^3 - 2$＞　　$\sqrt[3]{2} \fallingdotseq 1.2599210499$　　x軸対称、$x \geqq \sqrt[3]{2}$

x	1.262	**1.29**	1.3	1.4	1.5	1.75	1.95	1.99	**2**	2.01	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
x^3-2	0.01	**0.147**	0.197	0.744	1.375	3.359	5.415	5.881	**6**	6.121	7.261	8.648	10.17	11.82	13.63
$3x^2$	4.778	**4.992**	5.07	5.88	6.75	9.188	11.41	11.88	**12**	12.12	13.23	14.52	15.87	17.28	18.75
y	0.1	**0.383**	0.444	0.863	1.173	1.833	2.327	2.425	**2.449**	2.474	2.695	2.941	3.189	3.439	3.691
y'	23.99	**6.517**	5.711	3.408	2.878	2.506	2.451	2.45	**2.449**	2.45	2.455	2.469	2.489	2.513	2.54
y"	−5741	**−101**	−64.7	−8.6	−3.23	−0.56	−0.07	−0.01	**−0**	0.012	0.102	0.172	0.222	0.258	0.284

x	2.6	2.7	2.8	2.9	**3**	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4
x^3-2	15.58	17.68	19.95	22.39	**25**	27.79	30.77	33.94	37.3	40.88	44.66	48.65	52.87	57.32	62
$3x^2$	20.28	21.87	23.52	25.23	**27**	28.83	30.72	32.67	34.68	36.75	38.88	41.07	43.32	45.63	48
y	3.947	4.205	4.467	4.732	**5**	5.272	5.547	5.826	6.108	6.393	6.683	6.975	7.271	7.571	7.874
y'	2.569	2.6	2.633	2.666	**2.7**	2.734	2.769	2.804	2.839	2.874	2.909	2.944	2.979	3.013	3.048
y"	0.304	0.318	0.329	0.336	**0.342**	0.346	0.348	0.35	0.35	0.35	0.35	0.349	0.347	0.346	0.344



有理点（3,5）における接線と曲線との交点は有理点（1.29,0.383）

$2yy' = 3x^2$ より接線の傾きは、$y'=33/(2\cdot5)=2.7$

接線は、$y = 2.7(x-3)+5$ ・・・

$y^2 = x^3 - 2$ との連立方程式を解いて、・・・

有理点から有理点が得られる。

① 3次曲線上の点Pにおける接線と曲線との交点も有理点。

② 有理点PとQを通る直線と曲線との他の交点も有理点。