数学散歩　Ⅸ－31　　　　　　　２０１９．５．　α　　岐阜市　村山錞司

問題づくりの参考に　　：PART　7

「フェルマーの最終定理 ： $x^n+y^n=z^n$ (n≧3)は自然数解 x、y、z をもたない。」⑥（最終）

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

なお、不明な単語、疑問点などｲﾝﾀｰﾈｯﾄで検索すると、ｿﾞﾛｿﾞﾛ 出てきて参考になります。

＜記事、問題など＞

Ｂ　フェルマーの大定理が解けた！　足立恒雄　講談社　　その３

ﾃﾞｨｵﾌｧﾝﾄｽの問題がいくつか紹介されているが、いずれも難問で手がつかない。その中から面白い問題を一題紹介する。

問題Ｖの改題
$x+1 = u^2$ 、 $3x+1 = v^2$ 、 $8x+1 = w^2$ 　となる自然数解 x を求めよ。

（題意）「 4 数を、その中から任意の 2 数をとって掛け合わせて 1 を加えれば常に平方数になるように定めよ。」 → １、3、8 の 3 数とすれば $1\cdot 3+1=2^2$、 $1\cdot 8+1=3^2$、 $3\cdot 8+1=5^2$ となるから、残りの一つの数 x を求めよ。・・・ということである。

（本から）・・・面白いことに x = 120 という整数解が存在する。1、3、8、120 という 4 数から任意に 2 数を選んで積をつくり 1 を加えると平方数になる。・・・

（感想として）　120 がどんな方法で出てきたのか不思議。本にはﾃﾞｨｵﾌｧﾝﾄｽの「算術」にある整数でない解として、(1/16,33/16,68/16,105/16) が紹介されてはいるが？

（参考１）問題Ｖの 3 つの式をかけ合わせて uvw = y とすると、

$y^2 = (x+1)(3x+1)(8x+1)$ という 3 次曲線（楕円曲線）は整数解をもつ。・・・となる。

（参考２）ｲｷﾞﾘｽのﾍﾞｰｶｰによって、上の等式は (x, y) = (120, 11・19・31) 以外に整数解を持たないことが証明されている(1969)。

＜楕円曲線＞

$y^2 = x^3 + ax + b$ 　（$x^3 + ax + b = 0$ は重根をもたない。）

。　上記の 3 次曲線に双有理同値な曲線を楕円曲線という。

。　双有理変換・双有理同値（概略）：

有理式で移りあえる（双有理変換）曲線を双有理同値であるという。

。　参考として、**＜別紙＞にグラフの概念図などをつけた。**点検をよろしく。

＜双有理変換の例＞

。　$y^2 = x^3 + 3x^2 + x - 1 \quad\Leftrightarrow\quad Y^2 = X^3 - 2X$

x+1=X 、y=Y とすると　$y^2 = (x+1)^3 - 2(x+1)$　、　$Y^2 = X^3 - 2X$

。　$y^2 = 3x^3 + 1 \quad\Leftrightarrow\quad Y^2 = X^3 + 1/81$

x=3X 、$y=3^2Y$ とすると　$3^4Y^2 = 3^4x^3+1$ から得られる。

＜（本から）双有理変換になる高度な例＞

(A)　$x^3 + y^3 = a\ (a\neq 0) \quad\Leftrightarrow\quad Y^2 - 3Y = aX^3 - 1\ (a\neq 0)$　（楕円曲線）

x + y = u とおく。 x = u − y を代入して　$u^3 - 3u^2y + 3uy^2 = a$

$$\Leftrightarrow\ 1 - 3\cdot\frac{y}{u} + 3\left(\frac{y}{u}\right)^2 = a\left(\frac{1}{u}\right)^3$$

X = 1/u 、Y = y/u とすると、右の等式になる。 u = x + y だから変換は、

$$X = \frac{1}{x+y}、\quad Y = \frac{y}{x+y} \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{1-Y}{X}、\quad y = \frac{Y}{X}$$

(B)　$y^2 = x^4 + 1 \quad\Leftrightarrow\quad Y^2 = 4X^3 - X \quad\Leftrightarrow\quad y^2 = x(x^2 - 4)$　（楕円曲線）

$$x = \frac{Y}{2X}、\quad y = \frac{2X+Y^2}{4X^2}\ \left(= \frac{1}{2X} + x^2 \right) \quad\Leftrightarrow\quad X = \frac{1}{2(y-x^2)}、\quad Y(=2xX) = \frac{x}{y-x^2}$$

１番目に代入して、 $\dfrac{4X^2+4XY^2+Y^4}{16X^4} = \dfrac{Y^4}{16X^4} + 1$　　整理すれば２番目を得る。

２番目に($\times 4^2$) をすれば、 $(4Y)^2 = (4X)^3 - 4(4X)$

x = 4X 、y = 4Y　⇔　X = x/4 、Y = y/4　　により３番目を得る。

(C)　$y^2 = x^4 - x \quad\Leftrightarrow\quad Y^2 = X^3 + 1$　（楕円曲線）

x^4 で割って　$\left(\dfrac{y}{x^2}\right)^2 = 1 + \left(-\dfrac{1}{x}\right)^3$

$$X = -\frac{1}{x}、\quad Y = \frac{y}{x^2} \quad\Leftrightarrow\quad x = -\frac{1}{X}、\quad y = \frac{Y}{X^2}$$

（参考）(B)、(C) のように有理点を少なくとも一つもつ 4 次曲線は一般に双有理変換によって 3 次曲線に変換されることが知られている。(本より)

＜判別式＞

$y^2 = x^3 + ax + b$ の判別式 ： $-4a^3 -27b^2$

(ｲ) $x^3 + ax + b = 0$ の解をα、β、γとするとき、

$\{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\}^2 = -4a^3 - 27b^2$

(ﾛ) 判別式 ≠ 0 ⇔ 重根を持たない。 ： 楕円曲線という。

問 $x^3 + ax + b = 0$ の解をα、β、γとするとき、
$\{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\}^2 = -4a^3 - 27b^2$ を示せ。

(証明) $x^3 + ax + b = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$ より

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 & \alpha+\beta = c,\ \alpha\beta = d \quad \text{とおくと、} \quad \gamma = -(\alpha+\beta) = -c \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = a & a = \alpha\beta+\gamma(\alpha+\beta) = \alpha\beta-(\alpha+\beta)^2 = d - c^2 \\ \alpha\beta\gamma = -b & b = -\alpha\beta\gamma = -cd \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\}^2 &= (\alpha-\beta)^2\{(\alpha+2\beta)(2\alpha+\beta)\}^2 \\ &= \{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\}\{2(\alpha+\beta)^2 + \alpha\beta\}^2 = (c^2 - 4d)(2c^2 + d)^2 \\ &= (c^2 - 4d)(4c^4 + 4c^2d + d^2) = 4c^6 - 12c^4d^2 - 15c^2d^2 - 4d^3 \\ &= 4(c^2 - d)^3 - 27c^2d = -4a^3 - 27b^2\end{aligned}$$

＜新しい有理点を求めるバシェの方法＞

3 次曲線 E 上の点 P が与えられたとき、

① 点 P における接線と曲線 E との交点も有理点になる。

② 2 点 P、Q が E 上の有理点のとき、直線 PQ と曲線 E との交点も有理点になる。

《興味を引いた例として》 (点の表現(-P)も含めて、本を参考に)

問 $y^2 = (x+1)(2x+1)(3x+1)$ の有理点を求めよ。

(考察) y 軸との交点 $P_1(0,1)$ 、 $-P_1(0,-1)$

x 軸との交点 $P_2(-1/3,0)$ 、 $P_3(-1/2,0)$、 $P_4(-1,0)$

y 軸、x 軸のそれぞれから 1 点ずつの 2 つの点を結ぶ直線と曲線 E との交点を求める。

① P_1 と P_2 直線は、$y = 3x + 1$ 交点を求めると、

$(3x+1)^2 = (x+1)(2x+1)(3x+1)$ $x \neq -1/3$ として $x^2 = 0$ (重根)

交点は、 $P_1(0,1)$ $y = 3x + 1$ は接線になる。

①’ $-P_1$ と P_2 直線は、$y = -3x - 1$ 同様にして

交点は、 $-P_1(0,1)$ 直線 $y = -3x - 1$ は接線になる。

以下、同様にして

② P_1 と P_3 直線 $y = 2x + 1$ 交点 $-P_5(-2/3,-1/3)$

②’ $-P_1$ と P_3 直線 $y = -2x - 1$ 交点 $P_5(-2/3,1/3)$

③ P_1 と P_4 直線 $y = x + 1$ 交点 $P_5(-2/3,1/3)$

③’ $-P_1$ と P_4 直線 $y = -x - 1$ 交点 $-P_5(-2/3,-1/3)$

①～③’で軸上に無い新しい点 $P_5(-2/3,1/3)$ と $-P_5(-2/3,-1/3)$ が得られた。

P_5 については、②’、③より、 $y = -2x - 1$ と $y = x + 1$ の交点。

$-P_5$ については、②、③’より、$y = 2x + 1$ と $y = -x - 1$ の交点。

残りの点 P_2 と P_5 、 $-P_5$ の関係は、

④ P_2 と P_5 直線 $y = -(1/3)\cdot(3x + 1)$ 曲線との交点は、

$(1/9)\cdot(3x+1)^2 = (x+1)(2x+1)(3x+1)$ ∴ $(3x+2)^2 = 0$

$x = -2/3$ (重根) 点 P_5 で接する。

④’ P_2 と $-P_5$ 直線 $y = (1/3)\cdot(3x + 1)$ 曲線との交点は、

$(1/9)\cdot(3x+1)^2 = (x+1)(2x+1)(3x+1)$ ∴ $(3x+2)^2 = 0$

$x = -2/3$ (重根) 点 $-P_5$ で接する。

①～④’により、ﾊﾞｼｪ の方法を用いることによって、有理点が求められたが、これらは閉じた体系になって、新しい他の有理点は求められない。なお、本には参考のグラフが描いてあるが、できれば(別紙) の概念図を参考に、関係のグラフを描いて吟味をお願いしたい。・・・

この後は、第４章 ﾌｪﾙﾏｰからｸﾝﾏｰへ 第５章 ついにﾌｪﾙﾏｰの大定理が証明された！ の２つの章からなっているが、専門的になりレベルが高く、私の力量不足のため、紹介はここで終わることにする。関心を持たれた方は、是非、直接本に当ってほしい。また、「C フェルマーの大定理 整数論の源流」についても参考にされればと思う。(参考 「数学散歩 Ⅸ-26」で紹介)

＜余談＞先日、このﾚﾎﾟｰﾄをExcelで作成していたら突然、画面が暗転しﾎﾞﾔﾎﾞﾔにそれを含むﾌｧｲﾙが使用不能。絶望に陥り、心臓が止まりそう。何日かかけてつくった原稿のﾌｧｲﾙがﾊﾟｰ。気を取り直していろいろやったら、どこかに別のﾌｧｲﾙとして保存を発見し修復。つらいひとときでした。