数学散歩　Ⅸ－32　　　　　　　２０１９．５．　β　　岐阜市　村山錞司

問題づくりの参考に　　：PART　８

「数列・級数　板垣・土師　ｱﾚﾌ社」(大学受験参考書 昭和55年9月１日 三版 600円）その１

前に紹介した「整数　アレフ社」（「Ⅸ-10(2018.6.β)～)と同じシリーズの本です。何が出てくるか分かりませんが、久し振りに昔に戻って学び直しです。気になった記事などを紹介します。

（構成）　A　基礎編(128p)　　B　応用編(43p)　　C　研究編(32p)

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜最近、気になった用語：漢字で書けますか？＞　　（答は後掲）

そんたく（　　　　）し　、しんし（　　　　）にうけとめ　、しゅくしゅく（　　　　）と

A　基礎編

Ⅰ　有限数列(60p)　　Ⅱ　漸化式(36p)　　Ⅲ　極限(32p)

＜記事、問題など＞

Ⅰ　有限数列

等差数列　A.P. (arithmetical progression)　　$a_k = (a_{k-1} + a_{k+1}) / 2$

等比数列　G.P. (geometrical progression)（幾何数列）　$a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$

調和数列　H.P. (harmonical progression)　逆数が等差数列になる。

演習（２）（[4]～[7]　から）　（演習（１）は略)

> [6]　a、b、c が等差数列であり、b、c、d が調和数列であるとき、a ： b = c ： d であることを示せ。　　（解は後掲。以下、同様）

演習（３）（[8]、[9]　から）

> [9]　次の数列の第 n 項までの和 S_n を求めよ。$1, 1+a, 1+a+a^2, 1+a+a^2+a^3, \cdots$

＜復習として＞　　（注：Σは $\Sigma_{k=1}{}^{n}$ (k=1 から k=n までの和) の略で、以後同様の場合あり)

$$\Sigma 1 = n \text{、} \Sigma k = \frac{n(n+1)}{2} \text{、} \Sigma k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{、} \Sigma k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

（本では、Σ k^3 まで知っていれば十分である。　とあるが・・・）

（参考）「数学散歩 Ⅸ-15 2018.9.α」

> 問　$Q = \Sigma_{k=1}{}^{n} k^4$ を次の 2 通りの方法で求めよ。
>
> (A)　$(x+1)^5 - x^5 = 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$ を利用する。
>
> (B)　$k(k+1)(k+2)(k+3) = \{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)-(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)\}/5$ を利用する。

演習（４）（[10] 3 問 、[11] 2 問 から）

> [10]　⑶　$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots\cdots$ のはじめの n 項の和 S_n を求めよ。
>
> [11]　⑵　1・2・3 + 2・3・5 + 3・4・7 + 4・5・9 + ・・のはじめの n 項の和 S_n を求めよ。

演習（５）（[12] 2 問 、[13] 2 問 から）

> [13]　次の数列の第 n 項 a_n、及び第 n 項までの和 S_n を求めよ。
>
> ⑴　1^2、3^2、7^2、15^2、31^2、63^2、・・・
>
> ⑵　0、18、48、100、180、294、・・・

演習（６）（[14] 1 問 から）[15] 2 問　(次回へ)

> [14]　初項 2 、公差 -3 の等差数列の第 n 項を a_n、初項 2 、公比 1/3 の等比数列の第 n 項を b_n とするとき、$\Sigma_{k=1}{}^{n} a_k b_k$ を求めよ。

＜解答、解説＞

> 演習（２）[6]　a、b、c が等差数列であり、b、c、d が調和数列であるとき、a ： b = c ： d であることを示せ。

（略証）　2b = a + c 、2/c = 1/b + 1/d より、a = 2b － c 、1/d = (2b － c)/bc = a/bc

∴　ad = bc　よって、 a ： b = c ： d

> 演習（３）[9]　次の数列の第 n 項までの和 S_n を求めよ。$1, 1+a, 1+a+a^2, 1+a+a^2+a^3, \cdots$

（略証）　第 k 項 f_k について $f_k = \begin{cases} a = 1 \text{ のとき、} k \\ a \neq 1 \text{ のとき、} (a^k - 1)/(a - 1) \end{cases}$

a = 1 のとき、　$s_n = 1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$

a ≠ 1 のとき、　$s_n = \dfrac{a}{a-1} \cdot \dfrac{a^n-1}{a-1} - \dfrac{n}{a-1} = \dfrac{a(a^n-1)}{(a-1)^2} - \dfrac{n}{a-1}$

> 問　$Q = \Sigma_{k=1}{}^{n} k^4$ を次の 2 通りの方法で求めよ。
>
> (A)　$(x+1)^5 - x^5 = 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$　を利用する。
>
> (B)　$k(k+1)(k+2)(k+3) = \{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)-(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)\}/5$ を利用する。

（略解）(A)　　x=1 から n まで加える。

$$
\begin{array}{rcl}
2^5 - 1^5 &=& 5 + 10 + 10 + 5 + 1 \\
3^5 - 2^5 &=& 5\cdot 2^4 + 10\cdot 2^3 + 10\cdot 2^2 + 5\cdot 2 + 1 \\
&\cdots\cdots& \\
+)\ (n+1)^5 - n^5 &=& 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 \\
\hline
(n+1)^5 - 1 &=& 5\Sigma k^4 + 10\Sigma k^3 + 10\Sigma k^2 + 5\Sigma k + \Sigma 1
\end{array}
$$

$\therefore\ n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n = 5Q + 10\cdot\{n(n+1)/2\}^2 + 10\cdot n(n+1)(2n+1)/6 + n(n+1)/2 + n$

$Q = \Sigma_{k=1}{}^n k^4$ のまとめ方はいろいろある。

$Q = n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)/30$ 、 $n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)/30$ 、

$(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n)/30$ 、 $n^5/5 + n^4/2 + n^2/3 - n/30$

(B)　k＝１から k=n まで加える。

$\Sigma k(k+1)(k+2)(k+3) = (1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 - 0\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4)/5 + (2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 - 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5)/5$

$+ \cdots + \{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) - (n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)\}/5$

$= n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)/5$ 　・・・①

$\Sigma k(k+1)(k+2)(k+3) = \Sigma k^4 + 6\Sigma k^3 + 11\Sigma k^2 + 6\Sigma k$

$= Q + 6\cdot\{n(n+1)/2\}^2 + 11\cdot n(n+1)(2n+1)/6 + 6\cdot n(n+1)/2$ 　・・・②

①、②から、n(n+1) で括って、$Q = n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)/30$ 　　（以下、(A) と同じ）

演習（４）
[10]　(3)　$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots\cdots$ のはじめの n 項の和 Sn を求めよ。
[11]　(2)　$1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot5 + 3\cdot4\cdot7 + 4\cdot5\cdot9 + \cdots$ のはじめの n 項の和 S_n を求めよ。

（略解）[10] (3) n が奇数のとき、 $1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots - (n-1)^2 + n^2$ 　$(1^2-2^2=(1-2)(1+2))$

$S_n = -(1 + 2 + 3 + \cdots + n-1) + n^2 = -n(n-1)/2 + n^2 = n(n+1)/2$

n が偶数のとき、$1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (n-1)^2 - n^2$

$S_n = -(1 + 2 + 3 + \cdots + n-1 + n) = -n(n+1)/2$

[11] (2) $S_n = \Sigma k(k+1)(2k+1) = 2\Sigma k^3 + 3\Sigma k^2 + \Sigma k = n(n+1)^2(n+2)/2$

演習（５）[13]　次の数列の第 n 項 a_n、および第 n 項までの和 S_n を求めよ。
(1)　1^2 、 3^2 、 7^2 、 15^2 、 31^2 、 63^2 、 ・・・
(2)　0、18、48、100、180、294、・・・

（略解）　(1)　2 乗抜きで、

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 && 3 && 7 && 15 && 31 && 63 & \cdots & b_n \text{（第 n 項）}\\
& \vee && \vee && \vee && \vee && \vee && \vee \\
& 2 && 4 && 8 && 16 && 32 & \cdots & 2^{n-1}
\end{array}
$$

$b_n = 1+2+4+\cdots+2^{n-1} = 2^n - 1$ 　よって　$a_n = b_n{}^2 = (2^n-1)^2 = 2^{2n} - 2\cdot2^n + 1$

次に　$S_n = \Sigma a_k = \Sigma(4^k - 2\cdot2^k + 1) = \{2^{2(n+1)} - 3\cdot2^{n+2} + 3n + 8\}/3$

(2)

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
4 && 18 && 48 && 100 && 180 && 294 & \cdots & a_n \\
& \vee && \vee && \vee && \vee && \vee && & \\
& 14 && 30 && 52 && 80 && 114 && \cdots & b_n \\
&& \vee && \vee && \vee && \vee &&&& \\
&& 16 && 22 && 28 && 34 &&& \cdots & c_n = 6n+10 \text{（等差数列）} \\
&&& \vee && \vee && \vee &&&&& \\
&&& 6 && 6 && 6 & \cdots &&&&
\end{array}
$$

$b_n = 14 + \Sigma_{k=1}{}^{n-1}(6k+10) = 3n^2 + 7n + 4$

$\therefore\ a_n = 4 + \Sigma_{k=1}{}^{n-1}(3k^2 + 7k + 4) = \cdots = n(n+1)^2$

$S_n = \Sigma_{k=1}{}^n k(k+1)^2 \ \cdots = n(n+1)(n+2)(3n+5)/12$

演習（６）[14]　初項 2 、公差 −3 の等差数列の第 n 項を a_n 、初項 2 、公比 1/3 の等比数列の第 n 項を b_n とするとき、$\Sigma_{k=1}{}^n a_k b_k$ を求めよ。

（略解）　$a_n = 2 - 3(n-1) = 5 - 3n = -3n + 5$

$b_n = 2\cdot(1/3)^{n-1}$ 　　　　$S_n = \Sigma_{k=1}{}^n a_k b_k$ 　とすると、

$S_n = \Sigma_{k=1}{}^n (-3k+5)\cdot 2\cdot(1/3)^{k-1} = -6\Sigma\{k\cdot(1/3)^{k-1}\} + 10\Sigma(1/3)^{k-1}$

$$
\begin{array}{rcl}
A_n = \Sigma\{k\cdot(1/3)^{k-1}\} &=& 1+2\cdot(1/3)+3\cdot(1/3)^2+4\cdot(1/3)^3+\cdots+n\cdot(1/3)^{n-1} \\
-)\ (1/3)A_n &=& (1/3)+2\cdot(1/3)^2+3\cdot(1/3)^3+\cdots+(n-1)\cdot(1/3)^{n-1} + n\cdot(1/3)^n \\
\hline
(2/3)A_n &=& 1+1\cdot(1/3)+1\cdot(1/3)^2+1\cdot(1/3)^3+\cdots+1\cdot(1/3)^{n-1} - n\cdot(1/3)^n \\
&=& \{1-(1/3)^n\}/(2/3) - n\cdot(1/3)^n
\end{array}
$$

$A_n = \dfrac{9}{4}\{1 - (\dfrac{1}{3})^n\} - \dfrac{n}{2\cdot3^{n-1}}$ 、 $B_n = \Sigma(\dfrac{1}{3})^{k-1} = \dfrac{3}{2}\{1 - (\dfrac{1}{3})^n\}$

$\therefore\ S_n = \cdots = \dfrac{3}{2}\{1 - (\dfrac{1}{3})^n\} + \dfrac{n}{3^{n-2}}$

＜最近、気になった用語＞

そんたく（忖度）し　、しんし（真摯）にうけとめ　、しゅくしゅく（粛々）と