数学散歩　Ⅸ - 33　　　　　　２０１９．６．　α　　岐阜市　村山錞司

問題づくりの参考に　　：PART　８

「数列・級数　板垣・土師　ｱﾚﾌ社」（大学受験参考書 昭和55年9月１日 三版 600円）その２

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

Ａ　基礎編　　Ⅰ　有限数列

＜記事、問題など＞

演習（６）（[14]（前回）、[15] 2 問　から）

[15]　次の数列のはじめの n 項の和を求めよ。

⑴　$1 - 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 - 4\cdot 2^3 + 5\cdot 2^4 - \cdots$

⑵　$1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + 25x^4 + \cdots \quad (x \neq 1)$

演習（７）（[16] 2 問 、[17] 2 問 から）

[16] ⑵　第 n 項が次の式で表される数列のはじめの n 項の和 S_n を求めよ。

$$\frac{1}{3 + 5 + 7 + \cdots + (2n + 1)}$$

[17] ⑴　$\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{n}{(n+1)!}$　であることを示せ。

⑵　$\Sigma_{k=1}{}^{n} \dfrac{1}{k!(k+2)}$　を求めよ。

演習（８）（[18] 4 問 、[19] 2 問 から）

[19]　次の数列について⑴、⑵の問に答えよ。ただし、m、n は整数で $2^m > 2n-1$ とする。

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{3}{16},\ \cdots \frac{15}{16},\ \frac{1}{32},\ \cdots$$

⑴　$\dfrac{2n-1}{2^m}$　はこの数列の第何項か。⑵　第 1 項から　$\dfrac{2n-1}{2^m}$　までの和を求めよ。

〔問題の研究〕（Ⅰ）（1～12 の 12 問から抜粋。略解などあり。検算などよろしく。）

1　(k の倍数の和)　200 より小さい正の整数で、次の条件を満たすものを求めよ。

⑴ 3 の倍数　⑵ 5 の倍数であって 3 の倍数でない

⑶ 2、3、5 のうち少なくとも１つの倍数

(解)　r の倍数の和を S(r) とすると、S(2)=9900、S(3)=6633、S(5)=3900、S(6)=3366、S(10)=1900、S(15)=1365、S(30)=630。⑴　S(3)=6633　⑵　S(5)−S(15)=2535

⑶　S(2)+S(3)+S(5)−{S(6)+S(10)+S(15)}+S(30)=14432

3　(等比数列)　等比数列のはじめの n 項の和を P、n 項の積を Q、n 項の逆数の和を T とするとき、　$Q^2 = \left(\dfrac{P}{T}\right)^2$　であることを示せ。

(解)　両辺ともに、$a^{2n}r^{n(n-1)}$　で等しい。

5（$\Sigma_{k=1}{}^{n} k^3$）　$\Sigma_{k=1}{}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$　の公式を次の⑴、⑵の方法で求めよ。

⑴（表）

1・1	1・2	1・3	1・4	・・・	1・n
2・1	2・2	2・3	2・4	・・・	2・n
3・1	3・2	3・3	3・4	・・・	3・n
・・・	・・・	・・・	・・・	・・・	・・・
・・・	・・・	・・・	・・・	・・・	・・・
n・1	n・2	n・3	n・4	・・・	n・n

(ｲ)　表の第 k 行の数の和 k・1+k・2+ … +k・n を求め、k = 1、2、…、n として全体の和を求める。

(ﾛ)　次にカギの手に区切った各区画の第 k 番目の和 k・1+k・2+ … +k・k+(k−1)・k + … +1・k を求め、k = 1、2、…、n として全体の和を求めて、(ｲ) = (ﾛ) とする。

⑵　$S_n = \Sigma_{k=1}{}^{n} k$　とおき、　$S_K{}^2 - S_{K-1}{}^2$　を計算し、利用する。

(解)　⑴　(ｲ)　k・1+k・2+ … +k・n = k・n(n+1)/2　k=1、2、…の和　$\{n(n+1)/2\}^2$

(ﾛ)　k・1+k・2+ … +k・k+(k−1)・k+ … +1・k = 2(k・1+k・2+ … +k・k) − k・k

= 2k・k(k+1)/2 − k^2 = k^3　その和は $\Sigma_{k=1}{}^{n} k^3$　(ｲ) = (ﾛ) より得る。

⑵　$S_k{}^2 - S_{k-1}{}^2 = k^3$　より、$k^3 = k^2\cdot(k+1)^2/4 - k^2\cdot(k-1)^2/4$

$\Sigma_{k=1}{}^{n} k^3 = \cdots = n^2\cdot(n+1)^2/4$

6　(Σ x・y)　(1+x)(1+2x)・・・(1+nx) の展開における x^2 の係数を求めよ。

(解) [{(1・1+1・2+…+1・n)−1・1} + {(2・1+2・2+…+2・n)−2・2} + … + {(n・1+…+n・n)−n・n}]/2

= { $(1+2+\cdots+n)^2 - (1^2+2^2+\cdots+n^2)$}/2 = n(n+1)(n−1)(3n+2)/24

8　(階差をとる)　数列 1、2、4、7,11、16、22、29、・・・ について

⑴　第 n 項 a_n を求めよ。⑵　第 4m 項までにあらわれる奇数の総和を求めよ。

（解）⑴　1　2　4　7　11　16　22　29　・・・ a_n　　$b_n = n$

v　v　v　v　v　v　v

1　2　3　4　5　6　7　・・・ b_n　　$a_n = 1+n(n-1)/2$

⑵　$m\geqq 1$ として

$a_{4m-3} = 1+(4m-3)(2m-2) = \underline{8m^2-14m+7}$ (奇数)　　$a_{4m-1} = 1+(4m-1)(2m-1) = 8m^2-6m+2$ (偶数)

$a_{4m-2} = 1+(2m-1)(4m-3) = 8m^2-10m+4$ (偶数)　　$a_{4m} = 1+2m(4m-1) = \underline{8m^2-2m+1}$ (奇数)

$\therefore\quad \Sigma\ (16k^2-16k+8) = 8m(2m^2+1)/3$

１０ $((-1)^n)$ 次の数列の第 n 項 a_n とはじめの n 項の和 S_n を求めよ。

⑴　a 、2a+1 、3a−2 、4a+3 、5a−4 、・・・　　⑵　(略)

（解）⑴　$a_n = na + (-1)^n(n-1)$　　$S_n = n(n+1)/2\cdot a + T_n$

$$
\begin{array}{rl}
T_n = & 0 + 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^n(n-1) \\
-)\quad -T_n = & \quad -1 + 2 - 3 + \cdots + (-1)^n(n-2) + (-1)^{n+1}(n-1) \\
\hline
2T_n = & 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n + (-1)^n(n-1) = \{1-(-1)^{n-1}\}/2+(-1)^n(n-1)
\end{array}
$$

$$T_n = \frac{1}{4} + (-1)^n\cdot\frac{2n-1}{4}\qquad \therefore\quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}\cdot a + \frac{1}{4} + (-1)^n\cdot\frac{2n-1}{4}$$

＜解答、解説＞

演習（６）[15] 次の数列のはじめの n 項の和を求めよ。

⑴　$1 - 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 - 4\cdot 2^3 + 5\cdot 2^4 - \cdots$

⑵　$1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + 25x^4 + \cdots\quad (x \neq 1)$

（略解）⑴

$$
\begin{array}{rl}
S_n = & 1 + 2\cdot(-2) + 3\cdot(-2)^2 + 4\cdot(-2)^3 + \cdots + n\cdot(-2)^{n-1} \\
-)\quad -2S_n = & \quad 1\cdot(-2) + 2\cdot(-2)^2 + 3\cdot(-2)^3 + \cdots + (n-1)\cdot(-2)^{n-1} + n\cdot(-2)^n \\
\hline
3S_n = & 1 + 1\cdot(-2) + 1\cdot(-2)^2 + 1\cdot(-2)^3 + \cdots + 1\cdot(-2)^{n-1} - n\cdot(-2)^n \\
= & \{1-(-2)^n\}/(1+2) - n\cdot(-2)^n
\end{array}
$$

$$\therefore\quad S_n = \frac{1-(3n+1)(-2)^n}{9}$$

⑵

$$
\begin{array}{rl}
S_n = & 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \cdots + n^2x^{n-1} \\
-)\quad xS_n = & \quad x + 4x^2 + 9x^3 + \cdots + (n-1)^2x^{n-1} + n^2x^n \\
\hline
(1-x)S_n = & 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots + (2n-1)x^{n-1} - n^2x^n \\
-)\ x(1-x)S_n = & \quad x + 3x^2 + 5x^3 + \cdots + (2n-3)x^{n-1} + (2n-1)x^n - n^2x^{n+1} \\
\hline
(1-x)^2S_n = & \underline{1} + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots + 2x^{n-1} - (n^2+2n-1)x^n + \underline{n^2}x^{n+1}
\end{array}
$$

$\underline{(1 = -1 + 2)}$

$= -1 + 2(1-x^n)/(1-x) + n^2(1-x)x^n - (2n-1)x^n$

$$\therefore\quad S_n = \frac{2(1-x^n)}{(1-x)^3} - \frac{1+(2n-1)x^n}{(1-x)^2} - \frac{n^2x^n}{1-x}$$

（[16] ⑴、⑵、[17] ⑴、⑵ から）

演習（７）　[16] ⑵　第 n 項が次の式で表される　$\dfrac{1}{3+5+7+\cdots+(2n+1)}$
数列のはじめの n 項の和 S_n を求めよ。

[17] ⑴　$\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{n}{(n+1)!}$ を示せ。　⑵　$\Sigma_{k=1}{}^n\ \dfrac{1}{k!(k+2)}$ を求めよ。

（略解）[16] ⑵　第 k 項は　$\dfrac{2}{k(2k+4)} = \dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}\right)$

$\therefore\quad S_n = \cdots\cdots = \dfrac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$　　[17] ⑴　略　　⑵　（答）　$\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{(n+2)!}$

演習（８）[19]　次の数列について⑴、⑵の問に答えよ。ただし、m、n は整数で $2^m>2n-1$ とする。

$\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{1}{4}$、$\dfrac{3}{4}$、$\dfrac{1}{8}$、$\dfrac{3}{8}$、$\dfrac{5}{8}$、$\dfrac{7}{8}$、$\dfrac{1}{16}$、$\dfrac{3}{16}$、… $\dfrac{15}{16}$、$\dfrac{1}{32}$、…

⑴　$\dfrac{2n-1}{2^m}$ はこの数列の第何項か。⑵　第 1 項から $\dfrac{2n-1}{2^m}$ までの和を求めよ。

（略解）⑴　数列は　… $\dfrac{1}{2^m}$、$\dfrac{3}{2^m}$、$\dfrac{5}{2^m}$、… $\dfrac{2n-1}{2^m}$、… $\dfrac{2^m-1}{2^m}$、…

$2^m-1 = 2\cdot 2^{m-1}-1$　だから分母が　2^m　の分数は　2^{m-1}　個あり、
分子が 2n-1 の分数は、その n 番目になる。

よって、　$(2n-1)/2^m$　は、最初から数えて、

$1+2+2^2+\cdots+2^{m-2}+n = 2^{m-1}-1+n$　より、第 $2^{m-1}-1+n$ 項

⑵　分母が 2^m の分数の和は、　$\{1+3+\cdots+(2n-1)\}/\ 2^m = n^2\ /\ 2^m$

分母が 2^k の分数（ $1\leqq k \leqq m-1$）の和は、

$\{1+3+\cdots+(2\cdot 2^{k-1}-1)\}/\ 2^k = 2^{(k-1)2}\ /\ 2^k = 2^{k-2}$

$1 \leqq k \leqq m-1$ の和は、　$\Sigma_{k=1}{}^{m-1}\ 2^{k-2} = 2^{m-2} - 1/2$

よって、全体の和は　$2^{m-2} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{n^2}{2^m}$