数学散歩　Ⅸ－34　　　　　　　　２０１９．６．　β　　岐阜市　村山錞司

問題づくりの参考に　　：PART　８

「数列・級数　板垣・土師　ｱﾙﾌｧ社」(大学受験参考書 昭和55年9月１日 三版 600円）その３

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜追加の話題＞「図解 統計学超入門 高橋洋一 あさ出版」から

（例題） 次の 20 個のマスに無作為に、１から２０までのいずれかの数字を記入してみてほしい。

・・・できただろうか。（実際、入れてみてください。解説などは後掲）

A　基礎編　　Ⅱ　漸化式

＜記事、問題など＞

1　$a_{n+1} = p\cdot a_n + q$

演習（9）（[20] 3 問　から）

[20] 次の数列のはじめの n 項の和を求めよ。

⑴ $a_1 = 1$ 、$a_{n+1} = 2a_n+1$　⑵ $a_1 = 1$、$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n+2}$　⑶ $a_1 = 10$ 、$a_n = \sqrt{\dfrac{a_{n+1}}{10}}$

（３問は親戚関係の問題になりますが。）

2　$a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$（$n \geqq 2$）

演習（１０）（[21] 2 問（略）、[22] 2 問　から）

[22] 数列 $\{a_n\}$ が次の条件で定められるとき、一般項 a_n を求めよ。

⑴　$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 1$　、$a_1 = 1$ 、$a_2 = 2$

⑵　$a_{n+1} - 4a_n + 4a_{n-1} = 0$（$n \geqq 2$）、$a_1 = 1$ 、$a_2 = 3$

⑴は右辺の 1 をどうするか？ ⑵は特性方程式の解が重根ですが・・・

3　$a_{n+1} = (ra_n + s)/(pa_n + q)$

（本文から）・・・実際の問題では、多くの場合、誘導がついているので、それに従って・・・

（例）$a_n = (3a_{n-1}+5)/(a_{n-1}-1)$（n = 2、3、…）で与えられた数列 $\{a_n\}$ がある。

⑴　α、βが適当な 2 次方程式の 2 根であるとき、数列 $\{(a_n-\alpha)/(a_n-\beta)\}$(n=1、2、…) が等比数列になるような 2 次方程式を求めよ。

⑵　$a_1 = 3$ として a_n を n の式で表せ。

（本と異なる別解です。）　⑴ 漸化式の両辺から x を引いて

$a_n - x = \{(3a_{n-1}+5)/(a_{n-1}-1)\} - x = \{\underline{(-x+3)a_{n-1}+(x+5)}\}/(a_{n-1}-1) = \underline{r(a_{n-1}-x)}/(a_{n-1}-1)$

として分子の係数を比較、　$-x+3=r$、$x+5=-rx$ より 2 次方程式は　$x^2-4x-5 = 0$　で、$x=-1$、5

$x=-1$　として $r=4$、　$a_n+1 = 4(a_{n-1}+1)/(a_{n-1}-1)$

$x=5$ として $r=-2$、　$a_n-5 = -2(a_{n-1}-5)/(a_{n-1}-1)$　　$\therefore\ \dfrac{a_n+1}{a_n-5} = -2\cdot\dfrac{a_{n-1}+1}{a_{n-1}-5}$

2 次方程式は $x^2-4x-5=0$（参考　a^n 、a^{n-1} を x として、特性方程式は $x^2-4x-5=0$ ）

⑵　$\dfrac{a_n+1}{a_n-5} = \cdots = (-2)^{n-1}\cdot\dfrac{a_1+1}{a_1-5} = (-2)^n$　　$\therefore\ \underline{a_n = \dfrac{5\cdot(-2)^n+1}{(-2)^n-1}}$

演習（１１）（[23]、[24]　から）

次の [23]、[24] で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。（改題）

[23]　$a_1 = 4$ 、$a_n = \dfrac{3a_{n-1}+2}{a_{n-1}+4}$（$n \geqq 2$）

[24]　$a_1 = 1$ 、$a_n = \dfrac{4-a_{n-1}}{3-a_{n-1}}$（$n \geqq 1$）

4　$\begin{cases} x_{n+1} = rx_n + sy_n \\ y_{n+1} = px_n + qy_n \end{cases}$

（例）$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n + 3y_n \end{cases}$　$x_1 = 2$、$y_1 = 1$ のとき、x_n 、y_n を求めよ。

（解１）$x_{n+1} + y_{n+1} = 4(x_n + y_n) = 4^2(x_{n-1} + y_{n-1}) = \cdots = 4^n(x_1+y_1) = 3\cdot 4^n$

$x_{n+1} - y_{n+1} = 2(x_n - y_n) = 2^2(x_{n-1} - y_{n-1}) = \cdots = 2^n(x_1-y_1) = 2^n$

$\therefore\ x_n = (3\cdot 4^{n-1}+2^{n-1})/2$ 、$y_n = (3\cdot 4^{n-1}-2^{n-1})/2$

（解２）$3x_{n+1}-y_{n+1} = 8x_n$ より、$y_{n+1} = 3x_{n+1}-8x_n$　$\therefore\ y_n = 3x_n-8x_{n-1}$ だから

上の条件より $x_{n+1} - 6x_n + 8x_{n-1} = 0$　特性方程式　$x^2 - 6x + 8 = 0$ より $x = 2$、4

$\therefore$　$\alpha = 2$、$\beta = 4$ で、$x_n = A\cdot 4^n + B\cdot 2^n$

$x_1 = 2$、$x_2 = 7$、・・・（解１）と同じ結果になる。

演習（１２）　（[25]（略）、[26]　から）

[26]　$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases}$　$x_0 = 1$、$y_0 = 1$、$n = 0$、1、2、・・・のとき、

⑴　適当なαをとると数列　$\{ x_n + \alpha y_n \}$　は等比数列になる。αを求めよ。

⑵　x_n、y_n を求めよ。

＜解答、解説＞

演習（９）［20］　次の数列のはじめの n 項の和を求めよ。

⑴ $a_1 = 1$、$a_{n+1} = 2a_n+1$　⑵ $a_1 = 1$、$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n+2}$　⑶ $a_1 = 10$、$a_n = \sqrt{\dfrac{a_{n+1}}{10}}$

（略解）⑴　$x=2x+1$ より $x=-1$、$a_{n+1}+1 = 2(a_n+1) = 2^n(a_1+1) = 2^{n+1}$　∴ $a_n = 2^n-1$

⑵　逆数をとって $b_n = 1/a_n$ とおけば⑴より　$b_n = 2^n-1$　∴ $a_n = 1/(2^n-1)$

⑶　$a_{n+1} = 10 \cdot a_n^2$　とおけば　$\log a_{n+1} = 2 \cdot \log a_n + 1$　同様に　$a_n = 10^{2^n-1}$

演習（１０）［22］数列 $\{a_n\}$ が次の条件で定められるとき、一般項 a_n を求めよ。

⑴　$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 1$　、$a_1 = 1$、$a_2 = 2$

⑵　$a_{n+1} - 4a_n + 4a_{n-1} = 0$（$n \geqq 2$）、$a_1 = 1$、$a_2 = 3$

（略解）⑴　（本の方法は）

$$\begin{array}{rl} & a_{n+3} - 5a_{n+2} + 6a_{n+1} = 1 \\ -) & a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 1 \\ \hline \end{array}$$

$(a_{n+3}-a_{n+2}) - 5(a_{n+2}-a_{n+1}) + 6(a_{n+1}-a_n) = 0$

$b_n = a_{n+1}-a_n$　として、階差数列を利用

（別解）　平行移動を利用する。

$(a_{n+2}-x) - 5(a_{n+1}-x) + 6(a_n-x) = 1-(x-5x+6x) = 1-2x = 0$　∴ $x = 1/2$

$(a_{n+2}-1/2) - 5(a_{n+1}-1/2) + 6(a_n-1/2) = 0$　$b_k = a_k-1/2$　とおくと

$b_{n+2} - 5b_{n+1} + 6b_n = 0$　、$b_1 = 1/2$、$a_2 = 3/2$

特性方程式は、　$x^2 - 5x + 6 = 0$　で、$\alpha = 2$、$\beta = 3$

$b_{n+2} - 3b_{n+1} = 2(b_{n+1} - 3b_n) = \cdots 2^n(b_2 - 3b_1) = 0$

$b_n = 3b_{n-1} = \cdots = 3^{n-1} \cdot b_1 = 3^{n-1}/2$　∴　$a_n = (3^{n-1} + 1)/2$

⑵　特性方程式は、　$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0$　で、$\alpha = 2$（重根）

$a_{n+1} - 2a_n = 2(a_n - 2a_{n-1}) = \cdots 2^{n-1}(a_2 - 2a_1) = 2^{n-1}$

2^{n+1} で割って $b_n = a_n/2^n$ とおくと　$b_1 = 1/2$、$b_{n+1} - b_n = \cdots = 1/4$　等差数列

$b_n = 1/2 + (n-1)/4 = (n+1)/4$　∴ $a_n = b_n \cdot 2^n = (n+1)2^{n-2}$

演習（１１）［23］　$a_1 = 4$、$a_n = \dfrac{3a_{n-1} + 2}{a_{n-1} + 4}$　［24］　$a_1 = 1$、$a_n = \dfrac{4 - a_{n-1}}{3 - a_{n-1}}$

（略解）［23］（例）と同様 x を両辺から引いて $x = 1$、-2 ・・・　$a_n = \dfrac{2 \cdot 5^{n-1} + 2^n}{2 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}}$

［24］　同様にして、$x = 2$（重根）、$r = 1$　（「重根」への対応？）

$a_n - 2 = \dfrac{-(a_{n-1}-2)}{a_{n-1}-3}$　逆数をとって $\dfrac{1}{a_n - 2} = \dfrac{-(a_{n-1}-3)}{a_{n-1}-2} = -1 + \dfrac{1}{a_{n-1}-2}$

だから、数列 $\{ 1/(a_n-2) \}$ は初項 -1、公差 -1 の等差数列、

$1/(a_n-2) = -n$　$a_n - 2 = -1/n$　∴　$a_n = 2 - 1/n$

（参考）　［24］の（略解）を参考にして（前述）の（例）の次の別解を考えてみた。

$a_n+1 = \dfrac{4(a_{n-1}+1)}{a_{n-1}-1}$　より　$\dfrac{1}{a_n+1} = \dfrac{a_{n-1}-1}{4(a_{n-1}+1)} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{a_n+1}$

$b_n = \dfrac{1}{a_n+1}$　とおけば同じ結果を得る。

演習（１２）［26］　$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases}$　$x_0 = 1$、$y_0 = 0$、$n = 0$、1、2、・・・のとき、

⑴　適当なαをとると数列 $\{ x_n + \alpha y_n \}$は等比数列になる。αを求めよ。⑵　x_n、y_n を求めよ。

（略解）　⑴　$x_{n+1} + \alpha y_{n+1} = (2+\alpha)x_n + (3+2\alpha)y_n = r(x_n + \alpha y_n)$

係数を比較して、$2+\alpha = r$、$3+2\alpha = r\alpha$　$\alpha(\alpha+2) = 2\alpha+3$

$\alpha^2 = 3$ より $\alpha = \pm\sqrt{3}$、$r = 2 \pm \sqrt{3}$

⑵　$(\alpha, r) = (\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ のとき、$x_n + \sqrt{3}y_n = (2+\sqrt{3})(x_{n-1} + \sqrt{3}y_{n-1}) = \cdots = (2+\sqrt{3})^n$

$(\alpha, r) = (\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$ のとき、$x_n - \sqrt{3}y_n = (2-\sqrt{3})(x_{n-1} - \sqrt{3}y_{n-1}) = \cdots = (2-\sqrt{3})^n$

∴　$x_n = \dfrac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{2}$　、$y_n = \dfrac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$

＜追加の話題について＞（本から）・・・いろいろな観点があるが、とりあえず２つとしよう。

①　すべて異なる数字を選んだ。　②　数字が小さい順に並んでいる。

もし、いずれかに該当したり、どちらも当てはまったりすれば、あなたの選んだ数字は、ランダムになっていない。・・・（感想として・・・どうでしたか？？？）