数学散歩　Ⅸ－35　　　　　　　２０１９．７．　α　　岐阜市　村山錞司

問題づくりの参考に　　：PART　８

「数列・級数　板垣・土師　ｱﾚﾌ社」（大学受験参考書 昭和55年9月１日 三版 600円）その４

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜追加の話題として＞　《妙な３つの立方体（再掲）》　―　最後に掲載

Ａ　基礎編　　Ⅱ　漸化式

＜問題、略解など＞

〔問題の研究〕（Ⅱ）（13～19 の 7 問から。楽しめます。）

[13]（基本形）数列 $\{x_n\}$ において、任意の自然数 n に対して、次の等式が成り立つような例を、それぞれ１つあげ、その例について、x_n を求めよ。（⑴～⑷から）

⑴、⑵（略）　⑶　$x_{n+1} = x_n + n$　　⑷　$x_n + x_{n-1} = 6$

（略解）　（階差数列などではあるが、n = 1, 2, 3, …　並べて）

⑶　$x_{n+1} - x_n = n$　より

$x_2 - x_1 = 1$

$x_3 - x_2 = 2$

$\cdots$

$+)\ x_n - x_{n-1} = n-1$

$x_n - x_1 = n(n-1)/2$

$x_1 = a$　として

$x_n = a + n(n-1)/2$

⑷　$x_2 + x_1 = 6$

$x_3 + x_2 = 6$

$\cdots$

$x_n + x_{n-1} = 6$

$x_1 = 3-a$　とすると

$x_2 = 3+a$

$\cdots$

$x_n = 3 + (-1)^n a$

[14]（漸化式の変形）次の漸化式で与えられた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。（⑴、⑵）

⑴　$a_1 = 1$、$a_{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)a_n$　　⑵　$a_1 = 2$、$n \cdot a_{n+1} = (n+1)a_n + 1$

（略解）⑴　$\dfrac{a_{n+1}}{n+1} = \dfrac{a_n}{n} = \cdots = \dfrac{a_1}{1} = 1$

∴　$a_n = n$

⑵　$\dfrac{a_{n+1}}{n+1} = \dfrac{a_n}{n} + \dfrac{1}{n(n+1)}$

$+)\ \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n(n+1)}$

1/n(n+1)=1/n−1/(n+1)

∴　$\dfrac{a_{n+1}+1}{n+1} = \dfrac{a_n+1}{n} = \cdots = \dfrac{a_1+1}{1} = 3$　　よって　$a_n = 3n-1$

[15]（漸化式の変形）⑴　$a_1 = 1$、$a_{n+1} - 2a_n + 3^{n-1} = 0$　のとき a_n を求めよ。

⑵　$a_1 = 1$、$a_{2n} = 2a_{n-1}$、$a_{2n+1} = a_{2n} + 2^{n-1}$　（n = 1, 2, 3, ・・・）　のとき、a_{2n+1}、a_{2n} を求めよ。また、$S = \Sigma_{n=1}^{2n} a_k$　を求めよ。

（略解）⑴　2^{n+1} で割って、　$(a_{n+1}/2^{n+1}) - a_n/2^n = -(1/4)\cdot(3/2)^{n-1}$

$a_2/2^2 - 1/2 = -(1/4)$

$a_3/2^3 - a_2/2^2 = -(1/4)\cdot(3/2)$

$\cdots$

$+)\ a_n/2^n - a_{n-1}/2^{n-1} = -(1/4)\cdot(3/2)^{n-2}$

$a_n/2^n - 1/2$

$= -(1/4)\cdot\ \{1-(3/2)^{n-1}\}/\{1-(3/2)\}$

$\cdots$

$a_n = 2^n - 3^{n-1}$

（参考　本のように 3^{n+1} で割ってもできる。）

⑵　$a_{2n} = 2a_{n-1} = 2(a_{2n-2} + 2^{n-2}) = 2a_{2n-2} + 2^{n-1}$　　2^n で割って、$(a_{2n}/2^n) - (a_{2n-2}/2^{n-1}) = 1/2$

数列　$\{a_{2n}/2^n\}$　は公差 1/2 の等差数列。初項 $a_2/2 = 2a_1/2 = 1$　項数 n だから

$a_{2n}/2^n = 1 + (n-1)/2 = (n+1)/2$　∴ $a_{2n} = (n+1)\cdot 2^{n-1}$、　$a_{2n+1} = (n+2)\cdot 2^{n-1}$

$A\ (= a_2 + a_4 + a_6 + \cdots\cdots + a_{2n})$

$= 2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 2^2 + \cdots\cdots + (n+1)\cdot 2^{n-1}$

$-)\ 2A = \quad 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + \cdots\cdots + n\cdot 2^{n-1} + (n+1)\cdot 2^n$

$-A = 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2^2 + \cdots\cdots + 1\cdot 2^{n-1} - (n+1)\cdot 2^n$

$= 1 + (2^n - 1) - (n+1)\cdot 2^n = -n\cdot 2^n$　∴　$A = n\cdot 2^n$

$B\ (= a_1 + a_3 + a_5 + \cdots\cdots + a_{2n-1})$

$= 1 + 3\cdot 1 + 4\cdot 2 + \cdots\cdots + (n+1)\cdot 2^{n-2}$

$-)\ 2B = \quad 2\cdot 1 + 3\cdot 2 + \cdots\cdots + n\cdot 2^{n-2} + (n+1)\cdot 2^{n-1}$

$-B = 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + \cdots + 1\cdot 2^{n-2} - (n+1)\cdot 2^{n-1}$

$= 1 + (2^{n-1} - 1) - (n+1)\cdot 2^{n-1} = -n\cdot 2^n$　∴　$B = n\cdot 2^{n-1}$

以上から、　$S = A + B = 3n\cdot 2^{n-1}$

[16]（漸化式の変形）　$a_1 = 1$、$a_n = 2a_{n-1} + n-2$　（$n \geqq 2$）のとき a_n を求めよ。

（略解）　$\{a_n+An+B\}$ が公比 2 の等比数列にできたとすると、　$a_n+An+B = 2\{a_{n-1}+A(n-1)+B\}$

整理して、　$a_n = 2a_{n-1}+An-2A+B$　∴ $An-2A+B=n-2$ より、A=1、B=0

$a_n+n = 2(a_{n-1}+n-1) = 2^2(a_{n-2}+n-2) + \cdots = 2^{n-1}(a_1+1) = 2^n$　∴　$a_n = 2^n - n$

[17]（ﾌｨﾎﾞﾅｯﾁの数列） $a_1 = 1$、$a_2 = 1$、 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項は、
$a_n = (\alpha^n-\beta^n)/(\alpha-\beta)$ で表されることを示せ。ここに α、β は方程式 $x^2 = x+1$ の2根である。

（解は省略） この問題に替えて、２次方程式の解が重根の場合を次の問とした。

問 $a_{n+2} - 2\alpha a_{n+1} + \alpha^2 a_n = 0$ （$\alpha \neq 0$） のとき a_n を求めよ。

（略解） 漸化式を変形して $a_{n+2}-\alpha a_{n+1} = \alpha(a_{n+1}-\alpha a_n) = \cdots = \alpha^n(a_2-\alpha a_1)$

α^n で割って $(a_{n+2}/\alpha^{n+2}) - (a_{n+1}/\alpha^{n+1}) = (a_{n+1}/\alpha^{n+1}) - (a_n/\alpha^n)$

$= \cdots = (a_2/\alpha^2) - (a_1/\alpha)$

よって数列 $\{a_n/\alpha^n\}$ は、初項 (a_1/α) 公差 $(a_2/\alpha^2) - (a_1/\alpha)$ の等差数列

$a_n/\alpha^n = (a_1/\alpha) + (n-1)\cdot\{(a_2/\alpha^2) - (a_1/\alpha)\}$

$\therefore \quad a_n = (n-1)\alpha^{n-2}a_2 - (n-2)\alpha^{n-1}a_1$

[18]（３項間の漸化式） 次の数列の一般項 a_n を求めよ。 ⑴ は前問と同様のため省略

⑵ $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 4$、$a_1 = 1$、$a_2 = 5$ ⑶ $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = n$、$a_1 = 0$、$a_2 = 1$

（略解）⑵ $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2) = 0$、$x = 1$、$2$ より漸化式は次の２通りに変形できる。

(A) $(a_{n+2}-a_{n+1})-2(a_{n+1}-a_n) = 4$ (B) $(a_{n+2}-2a_{n+1})-(a_{n+1}-2a_n) = 4$

（本では）(A) を利用しているが、ここでは(B) による解を示す。

数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 $a_2-2a_1 = 3$ 、公差 4 の等差数列 $a_{n+1}-2a_n = 3+4(n-1) = 4n-1$

$a_{n+1}+A(n+1)+B = 2(a_n+An+B)$ と変形できたとすると、 $2A-A=4$、$2B-A-B=A-B=1$ より $A=4$、$B=3$

$a_{n+1}+4(n+1)+3 = 2(a_n+4n+3)$ だから数列 $\{a_n+4n+3\}$ は初項 8 、公比 2 の等比数列

$a_n+4n+3 = 8\cdot 2^{n-1}$ よって $a_n = 8\cdot 2^{n-1} - 4n - 3 = 4\cdot 2^n - 4n - 3$

⑶ 漸化式を変形して $(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n) = n$ $b_n = a_{n+1}- a_n$ （第１階差）とすれば

$b_{n+1}-b_n = n$ 、$b_1 = a_2- a_1 = 1$ $b_n = b_1 + \Sigma_{k=1}^{n-1} k = 1+n(n-1)/2 = (n^2-n+2)/2$

$\therefore \quad a_n = a_1 + \Sigma_{k=1}^{n-1} (k^2-k+2)/2 = (n-1)(n^2-2n+6) / 6$

[19]（連立漸化式） n 個のサイコロを投げたときの出た目について、１の目が偶数個（ 0 を含む）のものが a_n 、奇数個のものが b_n であるとする。

⑴ a_{n+1}、b_{n+1} を a_n、b_n で表せ。 ⑵ a_n、b_n を n の式で表せ。

（何かイメージがスッキリしません。少し遊びます。）

1 個の場合 1,2,3,4,5,6 1の目が偶数個(0個) 2,3,4,5,6 $a_1 = 5$

奇数個の目(1個のみ) 1 $b_1 = 1$

2 個の場合 (1,1) ┊ (1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(1,6) 偶数個 (1,1) (2,2)～(6,6)

(2,1) ┊ (2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(2,6) $a_2 = 1+5\times 5 = 26$

・・・・・・ 奇数個 (1,2)～(1,6) (2,1)～(6,1)

(6,1) ┊ (6,2)(6,3)(6,4)(6,5)(6,6) $b_1 = 5\times 2 = 10$

・・・・・・・・・ 多少、分かったような？？？

（略解）⑴ n 個から n+1 個へは、n 個に 1 個追加するから、合わせて偶数になるのは、

偶数個の場合、追加するのは 1 以外の 2 ～ 6 の目で 5 通り

奇数個の場合、追加できるのは 1 だけで 1 通り $a_{n+1} = 5a_n + b_n$

合わせて奇数になるのは、

偶数個の場合、追加できるのは 1 だけで 1 通り

奇数個の場合、追加するのは 1 以外の 2 ～ 6 の目で 5 通り $b_{n+1} = a_n + 5b_n$

⑵ （再掲） 1 個の場合 1,2,3,4,5,6 偶数個 2,3,4,5,6 $a_1 = 5$

奇数個 1 $b_1 = 1$

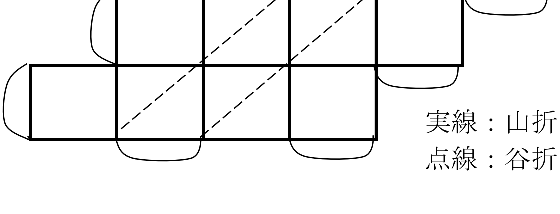
⑴より $a_{n+1}+b_{n+1} = 6(a_n+b_n) = \cdots = 6^n(a_1+b_1) = 6^{n+1}$ $a_n+b_n = 6^n$

$a_{n+1}-b_{n+1} = 4(a_n-b_n) = \cdots = 4^n(a_1-b_1) = 4^{n+1}$ $a_n-b_n = 4^n$

$\therefore \quad a_n = \dfrac{6^n + 4^n}{2} \qquad b_n = \dfrac{6^n - 4^n}{2}$

《妙な３つの立方体（再掲）》 昔の「数学散歩」で扱いました。隙間を利用して、再度紹介します。面白い立体です。３つの立方体が斜めに重なったものです。画用紙など厚紙で作ってみてください。１辺が４ｃｍのものを作りましたが、組み立てには苦労しました。

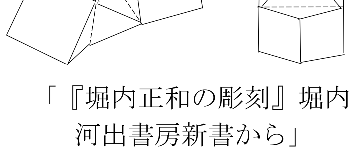
「展開図」



実線：山折り
点線：谷折り

ヒマツブシで楽しめます。

「見取り図らしきもの」



「『堀内正和の彫刻』堀内正和著
河出書房新書から」