数学散歩　Ⅸ－36　　　　　　　　２０１９．７．　β　　岐阜市　村山鐔司

問題づくりの参考に　　：PART　８

「数列・級数　板垣・土師　ｱﾙﾌ社」（大学受験参考書 昭和55年9月１日 三版 600円）その５

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

Ａ　基礎編　　Ⅲ　極　限

＜問題、略解など＞

演習（１３）（[27]９問、[28]、[29]（略）から）

[27] 第 n 項が次の式で与えられる数列の収束、発散を調べ、収束するものはその極限値を求めよ。（⑴～⑼の 9 問から）

⑸　$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot\sqrt{n}$　⑺　$(-1)^n \sin(n\pi+\pi/4)$　⑻　$(\cos n\pi)^{2n+1}$

（略解）⑸　$\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+(1/n)}+1} \to \dfrac{1}{2}$　⑺　n が偶数でも奇数でも　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

⑻　n が偶数のとき 1 、奇数のとき -1　振動して極限値はない。

[28] $a_1+a_2+\cdots+a_n = 3n^2$ (n = 1,2,3,…)　のとき次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}} - \sqrt{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}\right)$$

（略解）　$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1} = 3(n-1)^2$ より　$a_n = 3n^2 - 3(n-1)^2 = 6n-3$

$a_2+a_4+\cdots+a_{2n} = \Sigma_{k=1}{}^{n}\ (12k-3) = 6n(n+1)-3n = 3n(2n+1)$

$a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1} = (a_1+a_2+\cdots+a_{2n}) - (a_2+a_4+\cdots+a_{2n})$

$= 12n^2 - 3n(n+1) = 3n(2n-1)$

∴　$\sqrt{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}} - \sqrt{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}} = \sqrt{3n(2n+1)} - \sqrt{3n(2n-1)}$

$= \cdots \to \sqrt{6}/2$

演習（１４）（[30]、[31]（略）、[32]（略）から）

[30] 一般項が次の式で表される数列の収束、発散を調べよ。

⑴　$\dfrac{1-3^n+3^{n+1}}{1-3^n+3^{n+2}}$　⑵　（略）　⑶　$\dfrac{2^n}{(2+r)^{n+2}}$　$(r \neq -2)$

（略解）　⑴　$\dfrac{1-3^n+3^{n+1}}{1-3^n+3^{n+2}} = \dfrac{(1/3^n)-1+3}{(1/3^n)-1+3^2} \to \dfrac{1}{4}$

⑶　与式 $= \left(\dfrac{2}{2+r}\right)^n \cdot \dfrac{1}{(2+r)^2}$

$r>0$ のとき　$0< 2/(2+r) <1$　　与式 → 0

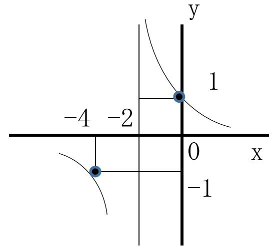
$r=0$ のとき　　与式 = 1/4

$-2<r<0$ のとき $1<2/(2+r)$　　与式 → ∞

$-4\leqq r<-2$ のとき $2/(2+r)\leqq -1$　　振動、極限値なし。

$r<-4$ のとき　　与式 → 0

（参考）　$y = \dfrac{2}{x+2}$ のグラフ



演習（１５）（[33]（略）、[34]～[36] から）

[34]　（⑴、⑵の 2 問から）

⑴　次の条件 (a)、(b) を同時に満たす整数 x、y 、z を求めよ。

(a) $1<x<y<z<9$　(b) 循環小数 $0.\dot{x}$　、　$0.0\dot{y}$　、　$0.00\dot{z}$　は等比数列をなす。

⑵　この等比数列の第 4 項を循環小数で表せ。

（略解）⑴　$0.xxx\cdots = (x/10)\cdot\{1-(1/10)\} = x/9$　同様に $0.0yyy\cdots = y/90$　$0.00zzz\cdots = z/900$

等比数列をなすから、$(x/9)\cdot(z/900) = (y/90)^2$　∴　$y^2 = xz$

$1<x<y<z<9$　だから　x = 2、y = 4、z = 8

⑵　3 つの数が、2/9、4/90、8/900 で、公比が 2/10 だから

第 4 項は $16/9000 = 0.001777\cdots = 0.001\dot{7}$

[35] 次の定理を証明せよ。また、この定理の逆は成り立たないことを示せ。

定理：「無限級数 $\Sigma_{n=1}{}^{\infty}a_n$　が収束すれば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である。」

（略解）（感想：反例（成り立たない例）がなかなか見つからなくて困った・・・）

$S_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$　が収束するから、$a_n = S_n - S_{n-1} \to 0$

（逆の反例）　$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 1/\sqrt{(}\ \sqrt{n+1}+\sqrt{n}\ ) \to 0$　ではあるが

$S_n = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$= \sqrt{n+1} - 1) \to \infty$　　（本の反例：$a_n = 1/n$ ）

[36] 次の無限級数の収束・発散を調べよ。（(1)（略）、(2)、(3)から）

(2)　$\left(2-\dfrac{3}{2}\right)+\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{4}{3}\right)+\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{5}{4}\right)+\cdots$

(3)　$2-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}-\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{3}-\dfrac{5}{4}+\cdots$

（感想　分かってても、どうやってそれを示すのか・・・）

（略解）(2)　n 番目の（　）を a_n とすると、$a_n = (n+1)/n - (n+2)/(n+1) = 1/n - 1/(n+1)$

$S_n = \{1-(1/2)\}+\{(1/2)-(1/3)\}+\cdots+\{(1/n)-(1/(n+1))\} = 1-(1/(n+1)) \to 1$。1 に収束

(3)　(2)の２つの分数の（　）をはずした数列の和だから、

2m 項までの和は、　$S_{2m} = 1 - 1/(m+1) \to 1$

2m-1 項までの和は、$S_{2m-1} = 2$　（定数）　　　よって、振動（発散）

〔問題の研究〕（Ⅲ）（20～25）の 6 問から(20、25)の 2 問。頭が変になりそう？）

[20] 次の命題は正しいか。正しければ○印を、正しくなければ×印をつけよ。また正しくないときはそれを示す実例を１つあげよ。（(1)～(4)の 4 問）

(1)　$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$

(2)　数列$\{a_nb_n\}$が収束するならば、　数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ はともに収束する。

(3)　数列$\{a_n\}$について、　$a_{mn} = ma_n$ $(m = 1,2,\cdots;\ n = 1,2,\cdots)$ ならば数列 $\{a_n/n\}$ は収束する。

(4)　$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = 0$　、$\lim_{n\to\infty}(a_n^2-b_n^2) = 0$　、$a_n \neq b_n$　となるような 数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$は存在しない。

（略解）（反例を見つけるのがなかなか難しい・・・）

(1)　×　　（反例として）’$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 1/\left(\sqrt{(n+1)} + \sqrt{n}\right) \to 0$　　であるが

$a_n = \sqrt{n+1} \to \infty$、　$b_n = \sqrt{n} \to \infty$　　有限確定でないから不可

（微妙なところです。他の例はあるか？考えると夜も・・・（後掲））

(2)　×　$a_n = n+1$、$b_n = 1/n$ で　$a_nb_n = 1 + 1/n \to 1$（収束）　$a_n \to \infty$　$b_n \to 0$

(3)　○　条件より　$a_n = na_1$　∴ $a_n/n = a_1$

(4)　×　$a_n = 2/n$ 、$b_n = 1/n$　とすれば　$a_n \neq b_n$　で

$a_n-b_n = 1/n \to 0$ 、　$a_n^2-b_n^2 = 3/n^2 \to 0$　　となる。

（(1) の別の反例として、$\log(n+1) - \log n = \log(1+(1/n)) \to 0$ ）

[25]　$\sin(\pi/\sqrt{x}) = 1$ の根を大きい方から $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n, \cdots$とする。

(1)　x_n を求めよ。

(2)　$a_n = \sqrt{x_n}\cdot\sqrt{x_{n+1}}$　$(n = 1,2,3,\cdots)$ とおくとき、無限級数 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\ a_n + \cdots$ の和を求めよ。

（略解）(1)　$\sqrt{x} > 0$ より、　$\pi/\sqrt{x} > 0$ だから、

$\pi/\sqrt{x} = 2k\pi+\pi/2$　$(k = 0,1,2,3,\cdots)$　　∴　　$x = \{2/(4k+1)\}^2$

k が大きくなれば、x は逆に小さくなるから、

$x_1 = (2/1)^2 = 1$、　$x_2 = (2/5)^2 = 4/25$、　・・・　　$x_n = \{2/(4n-3)\}^2$

(2)　$a_n = \dfrac{4}{(4n-3)(4n+1)} = \dfrac{1}{4n-3} - \dfrac{1}{4n+1}$

$S_n = \left(1-\dfrac{1}{5}\right) + \left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{9}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{4n-3}-\dfrac{1}{4n+1}\right)$

$= 1 - \dfrac{1}{4n+1} \quad \to \quad 1$

B　応用編　　（２８問から私の好みで選択）（2の1）

＜問題、略解など＞

2　　n が正整数のとき、次の S_n の最小値と、そのときの n を求めよ。

$S_n = |n-1| + |n-2| + \cdots + |n-10|$

（略解）　$n \leqq 1$、$n \geqq 10$ のとき $S_n \geqq S_1$、S_{10} だから最小となる k は $1 \leqq k \leqq 10$

$S_k = \underbrace{k-1 + k-2 + \cdots + 1}_{k-1} + 0 + \underbrace{1 + \cdots + 10-k}_{10-k}$

$= (k-1)k/2 + (10-k)(10-k+1)/2 = k^2 -11k + 55 = \{k-(11/2)\}^2 + 99/4$

よって、k = 5、6 のとき最小値　$S_5 = S_6 = 25$　（答）

（別解）

$S_1 = S_{10} = 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$　　$S_4 = S_7 = 3+2+1+0+1+2+3+4+5+6 = 27$

$S_2 = S_9 = 1+0+1+2+3+4+5+6+7+8 = 37$　　$S_5 = S_6 = 4+3+2+1+0+1+2+3+4+5 = 25$

$S_3 = S_8 = 2+1+0+1+2+3+4+5+6+7 = 31$　　よって、k = 5、6 のとき最小値　25