問題づくりの参考に　　：PART　８

「数列・級数　板垣・土師　ｱﾙﾌ社」（大学受験参考書 昭和55年9月１日 三版 600円）その６

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

Ｂ　応用編　　（２８問から私の好みで選択）（2の2）

＜問題、略解など＞

3　数列　$a_1 = 1$ 、 $a_2 = 4+5$ 、　$a_3 = 7+8+9+10$ 、 $a_4 = 10+11+12+13+14+15+16+17$ 、
$a_5 = 13+14+15+$・・・　において

⑴　a_n は何個の数の和であるか。また、その最初の数を求めよ。

⑵　a_n の値を求めよ。

（略解）⑴　1、2、$4=2^2$、$8=2^3$、…（個）より、a_n は 2^{n-1} 個の和になる。また、最初の数は
1、4、7、10、13 ・・・で初項 1 、公差 3 の等差数列だから、$1+3(n-1) = 3n-2$　　（答）

⑵　⑴より a_n は最初の数が $3n-2$ で公差が 1 、項数が 2^{n-1} の等差数列の和だから
$a_n = \{(3n-2)+(3n-2+2^{n-1}-1)\}2^{n-1}/ 2 = 2^{n-2}(6n - 5 + 2^{n-1})$　　（答）

6 ⑴　1 円、5 円、10 円の硬貨をとりまぜて合計 10n 円にする仕方は $(n+1)^2$ 通りあることを証明せよ。ただし、n は正整数とする。

⑵　さらに、50 円硬貨を加えて、これら 4 種類の硬貨をとりまぜて合計 1000 円にする仕方は何通りあるか。

（略解）⑴　使用硬貨の枚数を表にして調べる。合計 10n 円。

硬貨の枚数	10 円	5 円	1 円	仕方
	n	0	0	1
	$n-1$	2	0	3
	$n-1$	1	5	
	$n-1$	0	10	
	$n-2$	4	0	
	・・・			

10 円	5 円	1 円	仕方
$n-k$	$2k$	0	$2k+1$
$n-k$	$2k-1$	5	
・・・			
$n-k$	1	$10k-5$	
$n-k$	0	$10k$	
・・・			

10 円	5 円	1 円	仕方
0	$2n$	0	$2n+1$
0	$2n-1$	5	
・・・			
0	1	$10n-5$	
0	0	$10n$	

よって、　$1+3+5+$・・・$+(2n+1) = (n+1)^2$

⑵　1000 円 = 50 円×20 個 の、20 個から k 個除いた 20−k 個は 50 円硬貨で、残り k 個分の 50k 円を 1、5、10 円で対応するとすると、⑴より $(5k+1)^2$ 通りあり、k = 1～20 より、
$\Sigma_{k=0}^{20}(5k+1)^2 = 73,871$（通り）　　（答）

8　正の数 x に対して$\sqrt{x}$ の整数部分を f(x) で表すとき、

⑴　$f(x) = k$ を満たす自然数 x は全部で何個あるか。ただし、k は与えられた自然数である。

⑵　n が自然数のとき、$f(1)+f(2)+\cdots+f(n^2)$ の n^2 個の整数の和を求めよ。

（略解）⑴　$x > 0$ で$\sqrt{x}$ の整数部分が k だから、$k \leqq \sqrt{x} < k+1$
$k^2 \leqq x < k^2+2k+1$　x は自然数だから、 k^2、k^2+1、・・・、k^2+2k の $2k+1$ 個ある。
（ k = n のときは　$f(n^2)=n$ ）

⑵　k = 1 とすると、$1 \leqq x \leqq 3$　$f(1)=f(2)=f(3)=1$　　和は　1×3=3
k = 2 とすると、$4 \leqq x \leqq 8$　$f(4)=f(5)=\cdots=f(8)=2$　　和は　2×5=10
k = 3 とすると、$9 \leqq x \leqq 16$　$f(9)=f(10)=\cdots=f(15)=3$　　和は　3×7=21
・・・・・・
k = n−1 とすると、　$f((n-1)^2)=$・・・　$=f(n^2-1)= n-1$　　和は $(n-1)(2n-1)$
k = n のときは　$f(n^2)=n$　1 個のみ　　和は　n
$\Sigma_{k=1}^{n-1}k(2k+1) + n = n(4n^2 - 3n + 5) / 6$　　（答）

9 ⑴　x の整式 $(1-x)(1-3x)(1-5x)$・・・$\{1-(2n-1)\}$ を展開したとき、x^2 の係数を求めよ。

⑵　n 個の奇数 1、3、5、・・・、2n−1 から重複せずに r 個とってつくった積を r 個の選び方すべてにわたって加えたものを P_r とするとき、$\Sigma_{k=1}^{n}P_k$ を求めよ。

（略解）⑴　1、3、5、・・・、(2n−1) のうちの 2 数の積のすべての和だから、
$[\{1+3+5+\cdots+(2n-1)\}^2 - \{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2\}] / 2$
$= \{n^4-n(4n^2-1)/3\} / 2 = n(n-1)(3n^2-n-1) / 6$　　（答）

⑵　$(1-x)(1-3x)(1-5x)$・・・$\{1-(2n-1)x\}$
$= 1 - P_1x + P_2x^2 - P_3x^3 + \cdots + (-1)^n P_n x^n$
x = −1 とすれば
$2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n = 1 + P_1 + P_2 + \cdots + P_n$
よって、　$\Sigma_{k=1}^{n}P_k = 2^n\cdot n! - 1$　　（答）

１３　図のように、原点から始めて原点 $(0,0)$ に 1、点 $(1,0)$ に 2 、点 $(1,1)$ に 3、点 $(0,1)$ に 4 と x、y 両座標が整数であるすべての点に順次番号をつけていくとき、

⑴　座標 $(n,0)$ の点の番号を求めよ。ただし、n は負でない整数とする。

⑵　番号が 1000 である点の座標を求めよ。

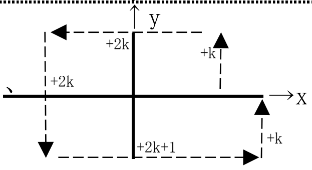
17	16	15	14	13
18	5	4	3	12
19	6	1	2	11
20	7	8	9	10
21	22	23	24	25

（略解）⑴　$(k,0)$ の番号を a_k として a_{k+1} への番号の増加を調べる。

$a_0 = 1$、$a_1 = 2$、$a_2 = 11$、・・・　（$k \geqq 1$ として）

$(k,0) \to (k,k)$ $+k$ 、$(k,k) \to (-k,k)$ $+2k$ 、$(-k,k) \to (-k,-k)$ $+2k$ 、

$(-k,-k) \to (k+1,-k)$ $+(2k+1)$、$(k+1,-k) \to (k+1,0)$ $+k$



よって　$a_{k+1} = a_k + 8k+1$　∴　$a_k - a_{k-1} = 8k-7$

$a_n = 1 + \Sigma_{k=1}^{n} (8k-7) = 4n^2 - 3n + 1$　　（答）

⑵　$4n^2 - 3n + 1 \leqq 1000$　より 1000 以下の最大の整数 n を求めると、

$n = 16$ として　$a_{16} = 977$ 、$(16,0)$: 977（番）、$(16,16)$: $977+16 = 993$（番）、

$100-993 = 7$ だから、$16-7 = 9$ より　求める座標は $(9,16)$　　（答）

１４　数列 $\{a_n\}$ がある。$b_n = a_n + a_{n+1}$ とおいて得られる数列 $\{b_n\}$ は公比 r（$r \neq 1$）の等比数列である。このとき一般項 a_n を a_1、b_1、r を用いて表せ。

（略解）　数列 $\{b_n\}$ は公比 r（$r \neq 1$）の等比数列だから、　$b_n = b_1 r^{n-1}$ 、　$a_{n+1} = b_1 r^{n-1} - a_n$

$a_2 = b_1 - a_1$　、　$a_3 = b_1 r - a_2 = b_1(r-1) + a_1$　、　$a_4 = b_1(r^2-r+1) - a_1$　、・・・

$a_n = b_1\{r^{n-2}-r^{n-3}++\cdots+(-1)^{n-3}r+(-1)^{n-2}\} +(-1)^{n-1}a_1$　と仮定すると、$a_{n+1} = b_1 r^{n-1} - a_n$ より

$a_{n+1} = b_1\{r^{n-1}-r^{n-2}++\cdots+(-1)^{n-2}r+(-1)^{n-1}\} +(-1)^{n}a_1$　（数学的帰納法により成立する。）

∴　$a_n = b_1 \cdot \{r^{n-1}+(-1)^{n-2}\} / (r+1) + (-1)^{n-1} \cdot a_1$　（答）

１７　２つの数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ が次のように定められているとき、a_n 、b_n を n で表せ。

$a_1 = 1$、$b_1 = 1$、　$a_{n+1} = 2a_n + b_n + 5$ … ①　$b_{n+1} = 4a_n - b_n + 2$ … ②

（略解）①より、$b_n = a_{n+1} - 2a_n - 5$ … ③　　②に代入して、

$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 5 = 4a_n - (a_{n+1} - 2a_n - 5) + 2$　整理して　$a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n - 12 = 0$

$a_{n+2}=a_{n+1}=6a_n=t$ とおいて $t=-2$ より　$(a_{n+2}+2)-(a_{n+1}+2)-6(a_n+2) = 0$

特性方程式　$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) = 0$　$\alpha=3$ 、$\beta=-2$

$a_n + 2 = A3^n + B(-2)^n$ … ④　$a_1=1$、$b_1=1$ より、$3A-2B = 1+2 = 3$、$9A+4B = 4+2 = 6$

$A = \dfrac{4}{5}$ 、　$B = -\dfrac{3}{10}$　④より　$a_n = \dfrac{4}{5} \cdot 3^n - \dfrac{3}{10} \cdot (-2)^n - 2$

③より　$b_n = \dfrac{4}{5} \cdot 3^n + \dfrac{6}{5} \cdot (-2)^n - 3$　（答）

２６　$a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$　… ①

$b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$　… ②　$a_0 = b_0 = 1$、で定義される２つの数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ がある。

⑴　$a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^{n+1}$　であることを証明せよ。

⑵　$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n^2}{b_n^2}$　を求めよ。

（略解）⑴　①、②より、　$a_1=3$、$b_1=2$ 、$a_2=7$、$b_2=5$ 、$a_3=17$、$b_3=12$ 、　・・・

$a_n^2 - 2b_n^2 = -(a_{n-1}^2 - 2b_{n-1}^2) = \cdots = (-1)^n(a_0^2 - 2b_0^2) = (-1)^{n+1}$

⑵　$\dfrac{a_n^2}{b_n^2} = 2 - \dfrac{1}{b_n^2}$　ここで $|b_n| \to \infty$ を示せばいいが、いろいろな方法がある。

$a_1=3$、$b_1=2$ 、・・・より、　$a_k > k$ 、$b_k > k$　とすると、

①、②から　$a_{k+1} > k+2k=3k > k+1$、$b_{k+1} > k+k=2k > k+1$　帰納法より、$a_n > n$ 、$b_n > n$

$b_n \to \infty$　だから　$\dfrac{a_n^2}{b_n^2} = 2 - \dfrac{1}{b_n^2} \to 2$　　（答）

２８　甲、乙 2 つの容器に、それぞれ濃度 10%、20% の食塩水が 100g ずつ入っている。いま、甲から 10g とって乙に入れよくかき混ぜて同じ量を甲に返すとき、甲、乙の濃度をそれぞれ a_1%、b_1% とする。この往復の操作を n 回行なった後の甲、乙の濃度をそれぞれ a_n%、b_n% とする。

⑴　a_n、b_n、a_{n+1} の間の関係式を求めよ。　⑵　a_n、b_n の間の関係式を求めよ。

⑶　a_n 及び $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

（略解）⑴　n 回後の甲、乙の食塩水 100g 中の食塩の量は、a_n g と b_n g 。

さらに、甲から 10(g) とって乙に入れた後の甲、乙の食塩の量は、それぞれ

$a_n - \dfrac{a_n}{10}$ と $b_n + \dfrac{a_n}{10}$ 。

乙をよくかき混ぜた後 10g を甲に返したとき、甲の食塩の量 a_{n+1} g は、

$a_{n+1} = a_n - \dfrac{a_n}{10} + \dfrac{10}{110} \cdot \left(b_n + \dfrac{a_n}{10} \right) = \dfrac{10a_n + b_n}{11}$　（答）

⑵　食塩の量は合わせて 30 g だから、$a_n + b_n = 30$　（答）

⑶　$b_n = 30 - a_n$ だから　$a_{n+1} = \dfrac{9a_n + 30}{11}$

$a_{n+1} - 15 = \dfrac{9}{11} \cdot (a_n - 15) = \cdots = \left(\dfrac{9}{11} \right)^{n+1} \cdot (a_0 - 15)$

$a_n - 15 = \left(\dfrac{9}{11} \right)^n (-5) \to 0$　∴　$a_n \to 15$　（答）