数学散歩　Ⅸ－38　　　　　　　　２０１９．８．　β　　岐阜市　村山鐏司

問題づくりの参考に　　：PART　８

「数列・級数　板垣・土師　ｱﾙﾌｧ社」(大学受験参考書 昭和55年9月１日 三版 600円)（最終）

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

C　研究編　（参考になりそうな記事、気になったことなどを紹介）

＜　記事など　＞

Ⅰ　差分・和分（微分と積分の関係と同じような関係にある差分・和分の解説）

1　差　分（微分に対するもの）

定義　自然数を変域とする関数 f(x) があるとき $\Delta x = f(x+1) - f(x)$ を f(x) の差分という。

（例）⑴　$f(x) = c$（定数）のとき、　$\Delta f(x) = 0$

⑵　$f(x) = x$ のとき、$\Delta f(x) = (x+1) - x = 1$

⑶　$f(x) = x(x-1)$ のとき、$\Delta f(x) = (x+1)x - x(x-1) = 2x$

⑷　$f(x) = x(x-1)(x-2)$ のとき、$\Delta f(x) = (x+1)x(x-1) - x(x-1)(x-2) = 3x(x-1)$

⑸　$f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$ のとき、 $\Delta f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} - \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{-2}{x(x+1)(x+2)}$

⑹　$f(x) = a^x$ のとき、$\Delta f(x) = a^{x+1} - a^x = (a-1)a^x$

定理１　a、b が定数のとき、$\Delta\{af(x) + bg(x)\} = a\Delta f(x) + b\Delta g(x)$

微分の公式と同じような公式が並びます。証明の多くは略します。

⑴　$\Delta\{f(x)\cdot g(x)\} = \Delta f(x)\cdot g(x+1) + f(x)\cdot \Delta g(x)$　（証明略）

⑵　$\Delta \dfrac{1}{f(x)} = -\dfrac{\Delta f(x)}{f(x)\cdot f(x+1)}$　（証明略）

⑶　$\Delta \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\Delta f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot \Delta g(x)}{g(x)\cdot g(x+1)}$　（証明略）

2　階乗関数

$x^{(n)} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$　（n 個の積）

$\Delta x^{(n)} = (x+1)x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+2) - x(x-1)\cdots(x-n+1)$

$= n\cdot x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+2) = n\cdot x^{(n-1)}$

n=0 のとき、 $x^{(0)} = x^0 = 1$　　$\Delta x^{(0)} = 0$

n=−m（ m は正の整数、n は負の整数）

$x^{(n)} = x^{(-m)} = 1 / x(x+1)(x+2)\cdots(x+m-1)$

$\Delta x^{(n)} = \Delta x^{(-m)} = \{1 / (x+1)(x+2)\cdots(x+m)\} - \{1 / x(x+1)\cdots(x+m-1)\}$

$= -m / x(x+1)(x+2)\cdots(x+m) = -m\cdot x^{(-m-1)} = n\cdot x^{(n-1)}$

3　和　分（積分に対するもの）

（不定）和分：定義　$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \Delta^{-1}g(x)$

（本より）　一般に不定和分は　$\Delta^{-1} f(x) = g(x) + C$（ C は任意定数）の形で示される。

⑴　$\Delta^{-1} 0 = C$　⑵　$\Delta^{-1} 1 = x + C$　⑶　$\Delta^{-1} x = \{x(x-1)\}/2 + C$

⑷　$\Delta^{-1} x(x-1) = x(x-1)(x-2)/3 + C$ 、　$\Delta^{-1} x^{(2)} = \{x^{(3)}\}/3 + C$

階乗関数だから、一般化して、$x^{(n)} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$　について

$\Delta x^{(n+1)} = (n+1)\cdot x^{(n)}$ より　　$\Delta^{-1} x^{(n)} = \dfrac{x^{(n+1)}}{n+1} + C$

⑸　$\Delta x^{(n)} = \Delta x^{(-m)} = -m\cdot x^{(-m-1)}$　だから　n が負の場合、$n = -m$ として

$\Delta x^{(n+1)} = \Delta x^{(-m+1)} = (-m+1)\cdot x^{(-m)}$ より　$\Delta^{-1} x^{(-m)} = \dfrac{x^{(-m+1)}}{-m+1} + C$

⑹　$\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = (a-1)\cdot a^x$ より　$\Delta^{-1} a^x = \dfrac{a^x}{a-1} + C$

定理２　$\Delta^{-1}\{a\cdot f(x)+b\cdot g(x)\} = a\cdot \Delta^{-1}f(x) + b\cdot \Delta^{-1}g(x) + C$

4　定和分 ― 数列の和を求めること

定理３　$\Delta^{-1}f(x) = g(x)$ とすると $\Sigma_{x=1}^{n} f(x) = g(n+1) - g(1)$　$(= [\Delta^{-1}f(x)]_1^{n+1})$

（証明）　$\Delta^{-1}f(x) = g(x)$ より $f(x) = \Delta g(x) = g(x+1) - g(x)$

$\Sigma_{x=1}^{n} f(x) = f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)+f(n)$

$= \{g(2)-g(1)\}+\{g(3)-g(2)\}+\cdots+\{g(n+1)-g(n)\} = g(n+1) - g(1)$

5　等差数列と等比数列の和（４の例として）

⑴　等差数列の場合：$f(x) = a + (x-1)d$

$\Delta^{-1}f(x) = \Delta^{-1}\{a+(x-1)d\} = (a-d)\Delta^{-1}1 + d\Delta^{-1}x = (a-d)\cdot x + d\cdot x(x-1)/2$

$\therefore \quad S_n = n\{2a+(n-1)d\}/2$

⑵　等比数列の場合：$f(x) = ar^{x-1}$

$\Delta^{-1}f(x) = \Delta^{-1}ar^{x-1} = (a/r)\cdot\Delta^{-1}r^x = (a/r)\cdot r^x/(r-1) = (a\cdot r^{x-1})/(r-1)$

$\therefore \quad S_n = a(r^n-1)/(r-1)$

6　いろいろの数列の和

⑴　Σx^2、Σx^3

(ｲ)　$x^2 = x(x-1)+x = x^{(2)}+x^{(1)}$　を利用

$\Delta^{-1}x^2 = \Delta^{-1}\{x^{(2)}+x^{(1)}\} = x^{(3)}/3 + x^{(2)}/2 = x(x-1)(x-2)/3 + x(x-1)/2$

$\therefore \quad S_n = (n+1)n(n-1)/3 - (n+1)/2 = n(n+1)(2n+1)/6$

(ﾛ)　$x^3 = x(x-1)(x-2)+3x(x-1)+x = x^{(3)}+3x^{(2)}+x^{(1)}$　を利用

$\Delta^{-1}x^3 = \Delta^{-1}\{x^{(3)}+3x^{(2)}+x^{(1)}\}$

$= x^{(4)}/4 + x^{(3)} + x^{(2)}/2 = x(x-1)(x-2)(x-3)/4 + x(x-1)(x-2) + x(x-1)/2$

$\therefore \quad S_n = \cdots = \{n(n+1)/2\}^2$

⑵　$\Sigma\{1/x(x+1)\}$

$\Sigma x^{(-2)} = [\Delta^{-1}x^{(-2)}]_1^{n+1} = [x^{(-1)}/(-2+1)]_1^{n+1} = [-1/x]_1^{n+1} = 1 - 1/(n+1)$

7　漸化式への応用　（以下略）

Ⅱ　単調有界数列

２つの例題のみ紹介する。いろいろやってみました。点検をよろしく。

（例題１）$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。$a_1=1$ のときと $a_1=3$ のときのそれぞれについて、次の問に答えよ。

⑴　数列 $\{a_n\}$ は単調有界であることを示せ。

⑵　$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

（例題２）　$a_1 = 1$ 、　$a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n}$　（n = 1、2、3、・・・）で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(解)(例題１)⑴　$a_{n+2} - a_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}+2} - \sqrt{a_n+2} = \dfrac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt{a_{n+1}+2}+\sqrt{a_n+2}}$

$a_1 = 1$ のとき $a_2 = \sqrt{3}$ だから $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < a_{n+2} < \cdots$　単調増加

また、$2 - a_{k+1} = 2 - \sqrt{a_k+2} = \dfrac{2 - a_k}{2 + \sqrt{a_k+2}}$

$a_k < 2$ のとき $a_{k+1} < 2$　帰納法より一般に　$a_n < 2$　上に有界

$a_1 = 3$ のとき $a_2 = \sqrt{5}$ だから $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > a_{n+1} > a_{n+2} > \cdots$　単調減少

$a_1 = 1$ のときと同様に、　$a_n > 2$　下に有界

⑵　$|a_n - 2| = \dfrac{|a_{n-1} - 2|}{\sqrt{a_n+2}+2} < \dfrac{|a_{n-1} - 2|}{2} < \cdots < \dfrac{|a_1 - 2|}{2^{n-1}} \to 0$　極限値は 2

（例題２）　$1 \leqq a_k \leqq 2$ とすると、$\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{1}{a_k} \leqq 1 \quad \therefore \quad 1 < 1 + \dfrac{1}{2} \leqq a_{k+1} = 1 + \dfrac{1}{a_k} \leqq 2$

$a_1 = 1$ だから、帰納法により　$1 \leqq a_n \leqq 2$

また、漸化式の分母を払って、$a_n a_{n+1} = a_n + 1 \quad \therefore \quad 2 \leqq a_n a_{n+1} \leqq 3$

$|a_{n+2} - a_{n+1}| = \left|\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}\right| = \dfrac{|a_{n+1} - a_n|}{a_n a_{n+1}} \leqq \dfrac{|a_{n+1} - a_n|}{2} \leqq \cdots \leqq \dfrac{|a_2 - a_1|}{2^n} \to 0$

よって、$a_{n+2} - a_{n+1} \to 0$　　a_{n+1}、$a_n \to \alpha$　とすると、　$\alpha = 1 + 1/\alpha \quad \alpha^2 - \alpha - 1 = 0$

$\alpha > 0$ より、　$\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ は求める極限値になる。

＜目についた本から＞　私の覚え書きです。

「『脊柱管狭窄症』が怖くなくなる本　２０歳若返る姿勢と生活の習慣
アスカ鍼灸治療院院長 福辻鋭記 講談社+α新書」（分館 BC494,6 ７）

◎　気になった文、記事などから拾って紹介

○　頭が首に乗っかるように心がける
○　イスには足を引いて座る
○　姿勢矯正には正座がおすすめ
○　間違ったスポーツは危険
○　ねじるだけで筋肉はほぐれる
○　イスに座って体をねじる
○　耳をひっぱり腎臓を健康に保つ

湧　泉
（ゆうせん―腎臓のツボ）
両足の裏の中央より少し上あたり。親指側の肉の盛り上がりと小指側の肉の盛り上がりが交わるあたりのすぐ下