数学散歩　Ⅸ－39　　　　　　　　　　２０１９．９．　　α　　岐阜市　村山錞司

問題づくりの参考に　　　　：PART　9

「空間図形　渡辺・土師　ｱﾚﾌ社」（大学受験参考書 昭和55年5月１日 三版 600円）その１

シリーズの中の１冊の本です。昔を思い出しながら取り組んでいます。

（構成）　A　基礎編(72p)　　　B　応用編(62p)　　　C　研究編(46p)

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

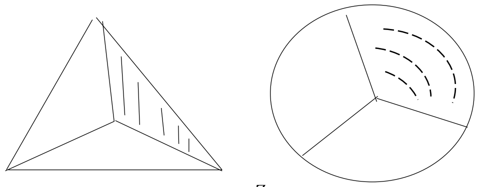
（余談）PDFﾌｧｲﾙが開かないときは、HPのﾀｲﾄﾙ「数学…」を右ｸﾘｯｸして Microsoft Edge をｸﾘｯｸしていろいろ…

A　基礎編

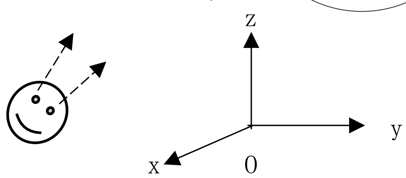
＜問題、解説など＞

Ⅰ　空間図形の表し方

○　空間図形を学ぶ上での困難



「どちらに凸か？」
平面上で空間図形を見やすいように
表現することは難しい。
（本より）
図は突然逆に変わり(ドッキリ！！！)
心理学では反転図形とよんでいる。



A：x 軸はこちらに向かっているか？
B：x 軸は紙面の後方に向かっているか?
人によっては、B かも知れない。

Ⅱ　点と点の関係

演習（３）　([9]～[12]　から)

[10]（原題）　四面体の１頂点と、それに対する三角形の重心を結ぶ直線は定点を通ることを示せ。
（定点とは何を意味するのか不明瞭なため、次のように改題（２通り）した。
(改題)　四面体の頂点を　$P_1(x_1,y_1,z_1)$ 、　$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 、　$P_3(x_3,y_3,z_3)$ 、　$P_4(x_4,y_4,z_4)$
とするとき次の⑴、⑵の問に答えよ。
⑴　四面体の各頂点と対面の三角形の重心を結ぶ４本の直線は１点で交わる。
⑵　P_1 と$\triangle P_2P_3P_4$ の重心 G_1 を結ぶ線分を 3 : 1 に内分する点 G を求めよ。

（解）（改題）の⑵のみ示す。　G　$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4},\ \dfrac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$

Ⅲ　直　線

演習（４）　([13]～[18]　から)

[16]　立方体の２つの対角線のなす角をθとするとき、cosθ を求めよ。

（略解）　立方体の 6 頂点を、　O(0,0,0)、A(1,0,0)、B(1,1,0)、C(0,1,0)、D(0,0,1)、E(1,0,1)、
F(1,1,1)、G(0,1,1) とする。$\overrightarrow{OF}$=(1,1,1) と $\overrightarrow{DB}$=(1,1,-1) のなす角をθとし、cosθを求め
ればよい。$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{OF}|\times|\overrightarrow{DB}|} = \dfrac{1+1-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}$　　（⟶ がズレますがよろしく）

演習（５）　([19]～[20]　から)

[19]　3 点 A(1,2,3)、B(4,1,0)、C(0,3,3) を頂点とする三角形の面積を求めよ。

（略解）線分 AB の長さ：$\sqrt{19}$、直線 AB：(x-1)/(-3) = (y-2)/1 = (z-3)/3 (=t)
直線上の点は (-3t+1,t+2,3t+3) 。　点 C から直線 AB に下し垂線の足を H とすれば、
$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}$ = (-3t+1-0)・ (-3)+(t+2-3)・1+(3t+3-3)・3 = 19t-4 = 0、　　t = 4/19
よって、H(7/19,42/19,69/19)。　垂線の長さは、$\sqrt{22}/19$ で、△ABC = $\sqrt{22}$ / 2

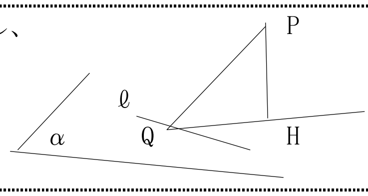
Ⅳ　平　面

○　平面と直線の垂直関係（おおまかにまとめてみた）

平面αと直線ℓについて
①　ℓ ⊥ α　⇔　α上の任意の直線 g について ℓ ⊥ g
②　α上の交わる２直線 a、b に対して ℓ ⊥ a、b　⇔ ℓ ⊥ α

＜三垂線の定理＞（本では）

平面α外の１点 P から平面αに引いた垂線の足を H とし、
平面α上の任意の直線をℓとする。
直線ℓ上に１点 Q をとるとき、
⑴　HQ ⊥ ℓ　⇒　PQ ⊥ ℓ
⑵　PQ ⊥ ℓ　⇒　HQ ⊥ ℓ



（略証）（本とは異なる）

⑴　　HQ ⊥ ℓ　なら　PH、HQ ⊥ ℓ　⇒　平面 PQH ⊥ ℓ ⇒ PQ ⊥ ℓ

⑵　　PQ ⊥ ℓ　なら　PQ、PH ⊥ ℓ　⇒　平面 PQH ⊥ ℓ ⇒ HQ ⊥ ℓ

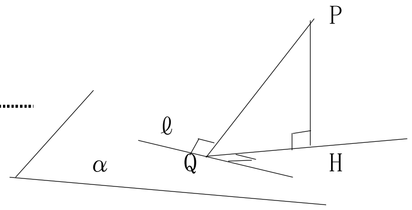
演習（６）　（[21]～[25]　から）

[25]　平面 α 外の１点 P から平面 α 上の直線 ℓ に下した垂線の足 Q を通って、α 上で ℓ に垂線を引き、この直線に P から下した垂線の足を H とすれば、PH ⊥ 平面 α である。これを証明せよ。

（本によれば）これは三垂線の定理の**逆**に相当するものである。

（私の高校時代の数研の教科書「数学Ⅰ 幾何編」によると、

この［25］そのものを『三垂線の定理』としている。）



（略証 ― 本とは異なる）

PQ ⊥ ℓ、QH ⊥ ℓ ⇒ 平面 PQH ⊥ ℓ ⇒ PH ⊥ ℓ 。よって PH ⊥ ℓ、QH だから PH ⊥ 平面 α

（参考）　点 P から平面 α への垂線は、３本の垂線（ PQ、QH、PH ）により引くことができる。

＜点 $P(x_0, y_0, z_0)$ と平面 α ： $ax+by+cz+d = 0$ との距離＞

平面 α　$ax+by+cz+d = 0$ に垂直な直線の方向比（方向余弦）は a 、b 、c である。

点 P から平面 α への垂線は　$\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$　(= t)

垂線の足 H は　$(at+x_0,\ bt+y_0,\ ct+z_0)$ で、平面 α 上にあるから、

$a(at+x_0)+b(bt+y_0)+c(ct+z_0)+d = 0$ より　$t = -\dfrac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$

垂線の長さ、２点 P、H 間の距離 h は

$$h = \sqrt{(at)^2+(bt)^2+(ct)^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot|t| = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

演習（７）　（[26]～[29]　から）

[28]　２つの平面 $3x+4y+z = 0$、$4x+3y+z = 0$ に至る距離が等しい点の軌跡を求めよ。

（略解）　$\sqrt{3^2+4^2+1^2} = \sqrt{4^2+3^2+1^2} = \sqrt{26}$　より、距離が等しい点を (X,Y,Z) とすると

$|3X+4Y+Z|/\sqrt{26} = |4X+3Y+Z|/\sqrt{26}$　だから　$3X+4Y+Z = \pm(4X+3Y+Z)$

よって、求める点の軌跡は２平面 $x = y$、$7x+7y+2z = 0$

[29]　点 (1,2,3) について平面 $2x+4y+z+1 = 0$ と対称な平面の方程式を求めよ。

（略解）　(x,y,z) と (X,Y,Z) が (1,2,3) について対称とすると、

$(x+X)/2 = 1$、$(y+Y)/2 = 2$、$(z+Z)/2 = 3$　∴　$x=2-X$、$y=4-Y$、$z=6-Z$

$2(2-X)+4(4-Y)+(6-Z)+1=0$ ∴　$2X+4Y+Z = 27$　　求める平面は $2x+4y+z = 27$

演習（８）　（[30]～[32]　から）

[30]　２点 (1,2,3)、(2,1,3) を通り、平面 $x-y+z = 4$ に垂直な平面を求めよ。

（略解）　求める平面を　$ax+by+cz+d = 0$ とすると

２点を通るから、$a+2b+3c+d = 0$ …①、$2a+b+3c+d = 0$ …②、平面 $x-y+z = 4$ に垂直だから、

$a-b+c = 0$ …③　　①、②、③より、$a=b$、$c=0$、$d=-3a$　　求める平面は $x+y-3 = 0$

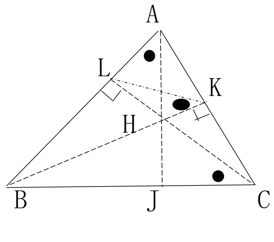
[32]　点 (1,2,3) を通り、２平面 $2x+3y-2z+5 = 0$、$4x-12y+2z+7 = 0$ の交線に平行な直線の方程式を求めよ。

（略解）　交線は２平面への垂線に垂直だからその方向比 a:b:c は、$2a+3b-2c=0$、$4a-12b+2c=0$

$2a=3b$、$2c=2a+3b=6b$ ∴ $c=3b=2a$　　求める直線は　$\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{6}$

＜次回への準備として、昔を振り返って平面幾何の復習＞

「垂　心」



△ABC で頂点 B、C から対辺 AC、AB に垂線を下し、その足を K、L とし、BK、CL の交点を H とする。

∠BKC = ∠BLC = 90° で、４点　B、C、K、L は BC が直径の円周上

∴　∠BCL = ∠BKL

∠HKA = ∠ALH = 90° で、４点　A、L、H、K は AH が直径の円周上

∴　∠BKL = ∠BAH　　ゆえに、　∠BCL = ∠BAH

AH と BC の交点を J とすると、A、L、J、C は同一円周上

∠ALC = ∠AJC = 90° 、AJ ⊥ BC で、H は△ABC の垂心になる。