数学散歩　Ⅸ－40　　　　　　２０１９．９．　$\beta$　　岐阜市　村山錞司

問題づくりの参考に　　：PART　９

「空間図形　渡辺・土師　ｱﾙﾌｧ社」（大学受験参考書 昭和55年5月１日 三版 600円）その２

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

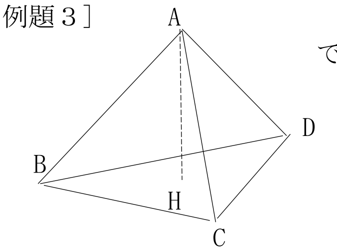
（余談）PDFﾌｧｲﾙが開かないときは、HPのﾀｲﾄﾙ「数学…」を右ｸﾘｯｸして Microsoft Edge で…

Ａ　基礎編　　Ⅳ　平　面　　（√ の屋根　がズレますのでご理解を）

＜問題、解説など＞

多面体（例題１～例題６　から）

［例題３］　四面体の２組の対辺が垂直なときは、残る１組の対辺もまた垂直であることを示せ。




（略解）　AB ⊥ CD、AD ⊥ BC　⇒　AC ⊥ BD を示す。

頂点 A から△ABC に垂線を下すと、AH ⊥ BC、CD、DB

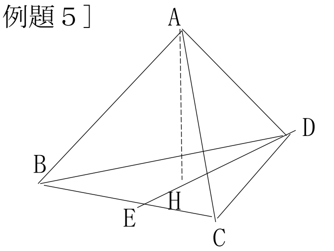
AB⊥CD　⇒　AB、AH⊥CD　⇒ 平面ABH⊥CD　⇒　BH⊥CD

AD⊥BC　⇒　AD、AH⊥BC　⇒ 平面ADH⊥BC　⇒　DH⊥BC

よって、H は△BCH の垂心で、CH⊥BD ⇒ CH、AH⊥BD

⇒ 平面ACH⊥BD ⇒ AC⊥BD

［例題５］　１辺の長さ a の正四面体の体積が $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ のとき a の値を求めよ。




（略解）（図参照）　△BCD = $(1/2)\cdot a\cdot\{(\sqrt{3}/2)\cdot a\} = \sqrt{3}\ a^2/4$

頂点 A から△BCD に垂線 AH を下すと点 H は△BCD の垂心で

重心だから、AH = $\sqrt{AD^2-DH^2}$ = $\sqrt{a^2-((2/3)\cdot\sqrt{3}/2)a)^2}$ = $\sqrt{(2/3)}\cdot a$

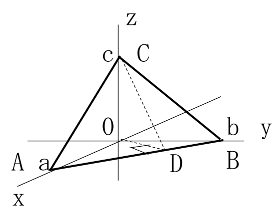
正四面体A-BCD = $(1/3)\cdot(\sqrt{3}\ a^2/4)\cdot(\sqrt{2}/\sqrt{3})\cdot a$

= $(\sqrt{2}/12)\cdot a^3$　　体積 = $\sqrt{6}/4$　だから

$a^3 = (\sqrt{6}/4)\cdot(12/\sqrt{2}) = 3\sqrt{3}$　　∴　$a = \sqrt{3}$

（参考）　１辺の長さが $a/\sqrt{2}$ の立方体の４隅から、対角線を１辺（長さは a ）とする４つの三角錐を切り取っても正四面体ができる。

［例題６］　３点 A(a,0,0)、B(0,b,0)、C(0,0,c) を頂点とする△ABC の面積を求めよ。（a、b、c ＞ 0 とする。）




（本の解説から）・・・いろいろな方法が・・。ヘロンの公式を・・余弦定理を使う方法など、ここでは違うやり方３通りの方法で、　（概要を紹介）

（解１）原点 O からAB への垂線の足を D として

OD = $ab/\sqrt{a^2+b^2}$ を利用・・・　　△ABC = (AB・CD)/2 = $\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$ / 2

（解２）　ベクトルの内積と△ABC = (1/2)・(AB・AC)・sin∠A を利用

（解３）四面体OABC の体積 = abc/6 、原点 O から平面ABC へ下した垂線の長さを利用

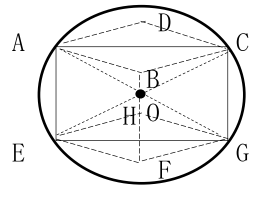
（私の解）CD = h とし、AD+BD = AB より、h について解くと　　$h = \sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\,/\sqrt{a^2+b^2}$

・・・　　△ABC = (1/2)・AB・h = $\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$ / 2

Ⅴ　球　面　（略）

Ⅵ　円柱・円錐　演習11、12　（略）、例題１、２、３　から

［例題２］（改題）　半径 $a_1$ の球 $O_1$ に内接する立方体にさらに内接する球 $O_2$ をつくる。$O_2$ の半径を x とするとき、x を $a_1$ で表せ。




（本では、さらに球を次々と内接させ・・・）

（略解）図で、半径 $a_1$ の球 $O_1$ に内接する立方体ABCD-EFGH

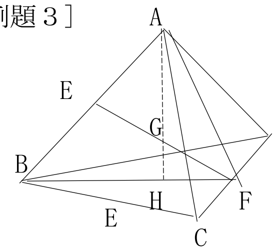
の１辺の長さを AB = BC = AE = X とすると、AC = $\sqrt{2}$ ・X

△AEC は∠A = 90° の直角三角形で 線分EC は球の中心 O を

通る。$X^2+(\sqrt{2}X)^2 = (2a_1)^2$ より　　$3X^2 = 4{a_1}^2$　　$X = (2/\sqrt{3})\cdot a_1$

次に、立方体の内接球の半径 x は１辺の長さ X の半分だから、$x = a_1/\sqrt{3}$

［例題３］　１辺 a の正四面体の内接球と外接球の半径を求めよ。




（略解）図で、頂点 A から底面の△BCD に垂線 AH を下す。

点 H は正三角形ABC の垂心で重心になる。

辺 AB、CD の中点をそれぞれ E、F とすると、線分 EF と AH は△ABF 上で交わり、交点を G とする。

同様にすれば、頂点 B、C、D からそれぞれの対面への垂線は点 G で交わる。AG は外接球の、GH は内接球の半径

になる。また、$\angle BEG = \angle BHG = 90°$ より、点 B、H、G、E は BG を直径とする同一円周上の点で、方べきの定理から $AG \cdot AH = AE \cdot AB = (a/2) \cdot a = a^2/2$

ここで、　$AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - \{(2/3)(\sqrt{3}/2)a\}^2 = (2/3)a^2$　　　$AH = (\sqrt{2}/\sqrt{3}) \cdot a$

∴　　$AG = (a^2/2) \cdot \{(\sqrt{3}/(\sqrt{2} \cdot a)\} = (\sqrt{6}/4) \cdot a$　(外接球の半径)

　　　$GH = AH - AG = (\sqrt{6}/12) \cdot a$　(内接球の半径)

B　応用編　　　Ⅰ～Ⅴ　まで　全６０問から

楽しめそうな問題などを幾つか紹介する。

＜問題、解説など＞

Ⅰ　距離と長さ　([1]～{10] から)

[1]　空間の２点 A(10,2,5)、B(-6,10,11) を直径の両端とする球面が z 軸から切り取る線分の長さを求めよ。

(略解)　球面上の任意の点を P(x,y,z) とすると、AB が直径だから、AP ⊥ BP より

$(x-10)(x+6)+(y-2)(y-10)+(z-5)(z-11) = 0$ となり、球面の方程式が得られる。

$x=y=0$ として $z^2-16z+15 = (z-1)(z-15) = 0$ より、$z = 15$、$1$

求める線分の長さは、$15 - 1 = 14$　(答)

[7]　空間にある正三角形を１つの平面上へ正射影したとき、３辺の長さがそれぞれ 2、3、$2\sqrt{3}$ である三角形が得られた。元の正三角形の１辺の長さはいくらか。

(略解)　xy 平面に正射影したとする。１つの頂点は原点 O に、$OA = 2$、$AB = 3$、$OB = 2\sqrt{3}$　として、A(2,0,0)、B(a,b,0)　(a、b ＞ 0 )とすれば、

$AB^2 = (a-2)^2 + b^2 = 9$　　$OB^2 = a^2 + b^2 = 12$　　…①

元の正三角形の３頂点を O(0,0,0)、C(a,b,c)、D(2,0,d)　(c、d ＞ 0)

とし、１辺の長さを t とすれば、　$t^2 = OD^2 = DC^2 = OC^2$　より、

$t^2 = 4 + d^2 = \underline{a^2 + b^2} + c^2 = \underline{(a-2)^2 + b^2} + (d-c)^2$　　…②

①、② より、　$d^2 - c^2 = \underline{a^2 + b^2} - 4 = 8$

$(d-c)^2 + 9 = 4 + d^2$　　c、d について解いて　　$c = 1$、$d = 3$

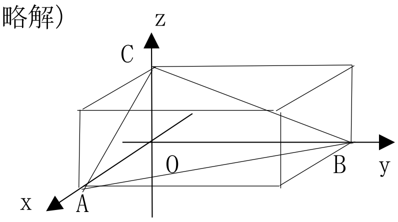
$t^2 = 4 + d^2 = 13$　　正三角形の１辺の長さは　$\sqrt{13}$　　(答)

[10]　次の (　) にあてはまる数は何か。

直方体の１頂点 O に集まる３辺を OA、OB、OC とする。$AB = 3$、$AC = 2$、$\angle BAC = 60°$ のとき、　$OA^2 = (\quad)$、　$OB^2 = (\quad)$、　$OC^2 = (\quad)$　　である。

また、点 O から△ABC の平面までの距離は $(1/3) \cdot \sqrt{(\quad)}$ である。

(略解)




O(0,0,0)、A(a,0,0)、B(0,b,0)、C(0,0,c) (a、b、c＞0)

とおく。　$AB = 3$ より、　$a^2+b^2 = 9$、

$AC = 2$ より、　$a^2+c^2 = 4$、

$\angle BAC=60°$ より、$BC^2=b^2+c^2=2^2+3^2-2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60° = 7$

$a^2+b^2+c^2 = (9+4+7)/2 = 10$　　だから、

$OA^2 = a^2 = 3$、　$OB^2 = b^2 = 6$、　$OC^2 = c^2 = 1$、　(答)

平面 (△ABC)は、$x/\sqrt{3} + y/\sqrt{6} + z/1 = 1$ より $\sqrt{2} \cdot x + y + \sqrt{6} \cdot z - \sqrt{6} = 0$

原点からの距離は　$h = |-\sqrt{6}|/\sqrt{2+1+6} = \sqrt{6}/3$　　(答)

Ⅱ　角の大きさ　([11]～[20]から)

[11]　空間において、ある直線は x 軸の正の方向と 60°、y 軸の正の方向と45° の角をなしている。 z 軸の正の方向となす角はどうか。

(略解) 直線の方向余弦を、$(\ell,m,n)$ とする。x 軸(1,0,0)、y 軸(0,1,0)、z 軸(0,0,1)で、x 軸の正の方向と 60° より、$\ell = \cos 60° = 1/2$、y 軸の正の方向と 45° より、$m = \cos 45° = 1/\sqrt{2}$、$\ell^2+m^2+n^2 = 1$ だから、$n = \pm 1/2$　で

z 軸の正の方向となす角は 60°、120°　(答)

[18]　四面体において、３組の対辺の長さがそれぞれ等しい場合は、１組の対辺の中点を結ぶ直線は、その組の辺と直交していることを証明せよ。

(略証) 四面体ABCD で、AB=CD、AC=BD、AD=BC

とすると、BC=CB で、△ABC ≡ △DCB だから、

BC、AD の中点をそれぞれ E、F とすれば

AE=DE となる。△EAD は二等辺三角形になり、

F は AD の中点で AD ⊥ EF、同様に、BC ⊥ EF が成立。