数学散歩　Ⅸ－41　　　　　　　　２０１９．１０．α　　岐阜市　村山鎼司

問題づくりの参考に　　：PART　9

「空間図形　渡辺・土師　ｱﾙﾌ社」(大学受験参考書 昭和55年5月１日 三版 600円) その３

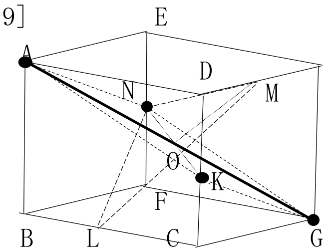
ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

Ｂ　応用編　　Ⅰ～Ⅴ　まで　全６０問から

＜問題、解説など＞

Ⅱ　角の大きさ　([11]～[20]から (続き))

[19]　図のような立方体ABCD-EFGH において線分 BC、DH、EF の中点をそれぞれ L、M、N とすると、直線 AGは平面 LMN に垂直であることを証明せよ。



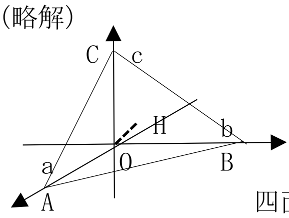
(略証)　DC の中点を K とすると、AK = KG = GN = NA で四角形AKGN はひし形。AG ⊥ NK 、AG と NK の交点を O とすると、AG ⊥ ON 。同様に BF、EH の中点を利用すれば AG ⊥ OM、AG ⊥OL となって、AG ⊥ 平面 LMN

(参考　本の解答では、空間座標、ベクトルを利用)

Ⅲ　面積の計算　([21]～[[27]から)

[23]　四面体OABC の三辺 OA、OB、OC は、どの２つも頂点 O において直交している。
このとき、$(\triangle ABC)^2 = (\triangle OAB)^2 + (\triangle OBC)^2 + (\triangle OCA)^2$ の成立を証明せよ。
(参考　「Ⅸ-16　2018.9.β」で「四平方の定理」として紹介している。)

(略解)



O(0,0,0)、A(a,0,0)、B(0,b,0)、C(0,0,c) (a、b、c ＞ 0) とすると、

$\triangle OAB=ab/2$、$\triangle OBC=bc/2$、$\triangle OCA=ca/2$、　$AB=\sqrt{a^2+b^2}$

平面ABC は、$x/a + y/b + z/c = 1$ 即ち $bcx+cay+abz-abc = 0$

原点 O から平面 ABC へ下した垂線の長さ h は、

$h = abc / \sqrt{(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)}$

四面体OABC の体積は、$\triangle OAB \cdot OC \cdot (1/3) = abc/6 = \triangle ABC \cdot h \cdot (1/3)$

$\triangle ABC = (abc/6) \cdot (3/h) = abc/2h = \sqrt{(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)}/2$

$\therefore\ (\triangle ABC)^2 = (b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)/4 = (\triangle OBC)^2 + (\triangle OCA)^2 + (\triangle OAB)^2$

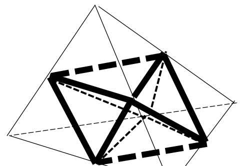
$= (\triangle OAB)^2 + (\triangle OBC)^2 + (\triangle OCA)^2$

(参考１：原点 O から辺 AB への垂線の長さを利用してもよい。)

(参考２：本では、$S' = S \cdot \cos\theta$ (θは正射影した平面との角) を利用)

[26]　１辺の長さ a の正四面体の各辺の中点を頂点とする立体図形の表面積を求めよ。

(略解)



１辺の長さが a/2 の正三角形の面積は、

$(1/2) \cdot (a/2) \cdot (\sqrt{3}/4) \cdot a = (\sqrt{3}/16) \cdot a^2$

それが 8 面あるから、　$(\sqrt{3}/2) \cdot a^2$

(参考1)　この立体図形は正八面体になる。

体積は、　$2 \cdot (1/3) \cdot (a/2)^2 \cdot (\sqrt{2}/2) \cdot (a/2)$
$= (\sqrt{2}/24) \cdot a^3$

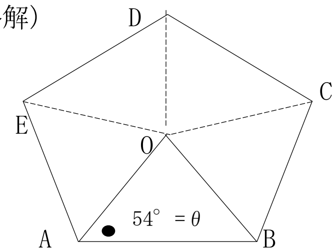
(参考２) 本には「研究」として、１辺の長さが a の正多面体の表面積の次表がある。

種類	正四面体	正六面体	正八面体	正十二面体	正二十面体
表面積	$\sqrt{3}\ a^2$	$6\ a^2$	$2\sqrt{3}\ a^2$	$3\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}\ a^2$	$2\sqrt{3}\ a^2$

正四、六、八、二十面体については、何とか計算できそうなため、正十二面体について、やってみる。１辺の長さが a の正五角形の面積を１２倍すればよいから、

問　　１辺の長さが a の正五角形の面積を求めよ。

(略解)



(いろいろ楽しめ (苦労し(？) ました。点検をよろしく。)

$\angle AOB = 360° /5 = 72°$ 、$\angle OAB = (180° - 72°)/2 = 54°$

$54° = \theta$ とおき、$\tan\theta$ を求める。 $5\theta = 270°$ を利用。

$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ 、 $\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$

$\tan 3\theta = \tan(270° - 2\theta) = \cot 2\theta = 1/\tan 2\theta$ で

$\tan 3\theta \cdot \tan 2\theta = 1$ だから・・・$5\tan^4\theta - 10\tan^2\theta + 1 = 0$

$\tan^2\theta > \tan^2 45° = 1$ だから　$\tan^2\theta = (5+\sqrt{20})/5 = 5(5+2\sqrt{5})/5^2$ 、$\tan\theta = \sqrt{5(5+2\sqrt{5})}/5$

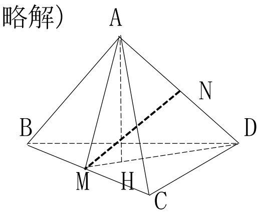
よって面積 S は、$S = 5 \cdot (1/2) \cdot a \cdot (\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}/5) \cdot (a/2) = (a^2/4) \cdot \sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$

12 倍すれば表の値を得る。 (黄金分割の利用もある。)

Ⅳ　体積の計算　([28]～[40]から)

[28]　四面体ABCD において、$AB = AC = DB = DC = 1$、$BC = AD = a$ であるとき、この体積を求めよ。

(略解)



BC、AD の中点をそれぞれ M、N 、頂点 A から AD に下した垂線の足を H とする。H は△BCD の垂心になる。

$AM = MD = \sqrt{AB^2-BM^2} = \sqrt{1-(a/2)^2} = \sqrt{4-2a^2}\ /\ 2$

$MN = \sqrt{AM^2-AN^2} = \sqrt{(4-a^2)/4 - a^2/4} = \sqrt{1-a^2/2} = \sqrt{(2-a^2)/2}$

△AMD $AH = MD \cdot AH\ /\ 2 = AD \cdot MN\ /\ 2$ だから

$AH = a \cdot \sqrt{(2-a^2)/2} \cdot 2\ /\ \sqrt{4-a^2} = a\sqrt{4-2a^2}\ /\ \sqrt{4-a^2}$

また、$\triangle BCD = (1/2) \cdot a \cdot (\sqrt{4-a^2}\ /\ 2) = (1/4) \cdot a\sqrt{4-a^2}$

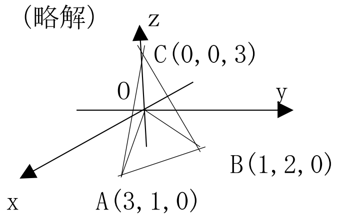
よって、四面体ABCD $= (1/3) \cdot (1/4) \cdot a\sqrt{4-a^2} \cdot a\sqrt{4-2a^2}\ /\ \sqrt{4-a^2}$

$= (1/12) \cdot a^2\sqrt{4-2a^2}$

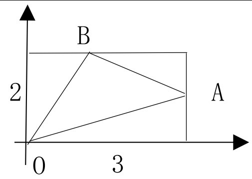
(参考)　本では、$(1/3) \cdot \triangle AMD \cdot BC$ を利用

[30]　空間の４点 O(0,0,0)、A(3,1,0)、B(1,2,0)、C(0,0,3) がある。四面体OABC の体積を求めよ。

(略解)



右図参照。



$\triangle OAB = 2 \cdot 3-(2 \cdot 1+3 \cdot 1+1 \cdot 2)/2 = 5/2$

よって、

四面体OABC $= (1/3) \cdot (5/2) \cdot 3 = 5/2$

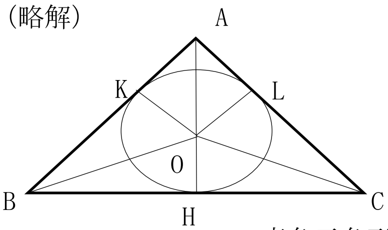
(本では)　△ABC を底面とし計算。

また、<研究>で、行列式の利用も紹介。

$$\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \pm\frac{3}{6}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \pm\frac{5}{2} \quad \text{より、} \frac{5}{2}$$

[35]　直円錐に内接する球の半径が、この直円錐の底面の半径の半分に等しいとき、直円錐と球の体積の比を求めよ。

(略解)



図で、直円錐の頂点 A と、球の中心 O を通る平面で直円錐を切る。△ABC は切断面で、球は点 K、L、H で直円錐に接する。球の半径 $OK = OH = OL = a$ 、底面の円の半径 $BH = CH = 2a$ 、$AH = h$ とおく。

$\triangle AKO \backsim \triangle AHB$ で、$AK : OK = AH : BH$ より、

$AK : h = AK : AH = OK : BH = a : 2a = 1 : 2$ 、$AK = h/2$

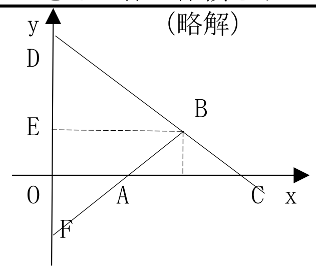
直角三角形AOK で、$AO^2 = OK^2 + AK^2$ より　$(h-a)^2 = a^2 + h^2/4$、$h = 8a/3$

直円錐の体積 V は、　$V = (1/3)\pi \cdot (2a)^2 \cdot (8a/3) = (32/9) \cdot \pi a^3$

球の体積 V’は、　$V' = (4/3) \cdot \pi a^3$

∴　$V : V' = 32/9 : 4/3 = 8 : 3$　(答)

[36]　A(a,0)、B(a+1,1)、C(a+2,0) (a＞0) を頂点とする△ABC を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。



(略解)

図で、$\triangle BAC = \triangle DOC - \triangle DFB (= 2 \cdot \triangle DBE) + \triangle OAF$ を y 軸のまわりを回転する。

求める体積 V は、

$V = (\pi/3)\{(a+2)^3 - 2(a+1)^3 + a^3\}$

$= \cdot\cdot\cdot = 2\pi(a+1)$　(答)

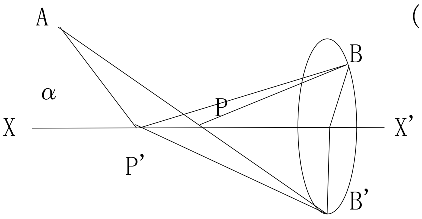
<積分で>　BC ： $y=-x+a+2$、$x=-y+a+2$　　AB ： $y=x-a$、$x=y+a$

$V = \pi\int_0^1(-y+a+2)^2\,dy - \pi\int_0^1(y+a)^2\,dy$

$= \cdot\cdot\cdot = 2\pi(a+1)$　(答)

Ⅴ　いろいろな問題　([41]～[60] から)

[41]　１つの直線 XX’とこの上にない２点 A、B とがあって、この全部は同一平面上にないとき、XX’上に１点 P を、PA と PB の和が最小になるように求めよ。



(略解)　点 A と直線 XX’によって定まる平面をαとする。点 B はα外の点で、点 B を直線 XX’のまわりに回転させ、平面αと A を含まない方での交点を B’とする。

AB’と XX’の交点 P が求める最小の点になる。

(∵　XX’上に他の点 P’をとれば、

AP’+ P’B = AP’+ P’B’＞ AB’ = AP + PB)