

「はじめての魔方陣 柴田和洋 悠光堂 (市立図書館中央 YA 410.7 シ)」

魔方陣は前にも扱いましたが(2019. 10. γ 号外 (魔方陣))、趣味にする方も多いようで、図書館にも関係の本が数冊ありました。上記の本はYA (ヤングアダルト) のコーナーで見かけました。適当に記事を拾って紹介します。なお、魔方陣については、ネットで検索してもいろいろ出てきます。

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

-----<問題、解説など>-----

魔方陣:(例)

8	1	6
3	5	7
4	9	2

 縦、横、斜め (二本の対角線) の枠 (参考)

1	2	3
4	5	6
7	8	9

の中にそれぞれ並ぶ、どの数の和も等しい数 (魔法和) になるもの。 自然方阵

< 3 次の魔方陣 > - 1 から 9 までの 9 個の数字をすべて使った魔方陣 (3 行 3 列) の性質

(1) 魔法和は 15 : $(1+2+3+4+5+6+7+8+9)/3 = 45/3 = 15$

(2)

a	b	c
d	e	f
g	h	i

 $e = 5$: $(a+e+i)+(c+e+g)+(b+e+h)+(d+e+f)$
 $= (a+b+c)+(d+e+f)+(g+h+i)+3e$
より $15 \times 4 = 15 \times 3 + 3e$ $e = 5$

a	b	c
d	5	f
g	h	i

(3) $a \neq 1$: $a = 1$ とすると、 $b+c = d+g = 14 = 5+9, 6+8$ 5 は使えないから 6+8 の一組だけで二組はできない。 $a \neq 1, c, g, i$ も同様。 b, d, f, h の中の $b = 1$ とする。

(4)

a	1	c
d	5	f
g	h	i

 $a+c = 14 = 6+8, a = 8$ とすると

8	1	6
d	5	f
g	h	i

 $\rightarrow$

8	1	6
3	5	7
4	9	2

 $c = 6 \rightarrow i = 2 \rightarrow f = 7$
 $\rightarrow d = 3 \rightarrow g = 4 \rightarrow h = 9$

< 3 次の魔方陣は一通り > 裏返ししたり、回転したり、対角線に対称移動しても同じものは同じ魔方陣とする。

8	1	6
3	5	7
4	9	2

 $\rightarrow$

4	3	8
9	5	1
2	7	6

 $\rightarrow$

2	9	4
7	5	3
6	1	8

 $\rightarrow$

6	7	2
1	5	9
8	3	4

 $\rightarrow$

4	9	2
3	5	7
8	1	6

 $\rightarrow$

8	3	4
1	5	9
6	7	2

 $\rightarrow$

6	1	8
7	5	3
2	9	4

 $\rightarrow$

2	7	6
9	5	1
4	3	8

① (イ $\rightarrow$ ロ $\rightarrow$ ハ $\rightarrow$ ニ) (ホ $\rightarrow$ ヘ $\rightarrow$ ト $\rightarrow$ チ) は 90° 回転
② (イ $\leftrightarrow$ ホ) ... 裏返し (反転)
③ (イ $\leftrightarrow$ ハ、チ) (ロ $\leftrightarrow$ ホ、ト) (ハ $\leftrightarrow$ チ、ヘ) (ニ $\leftrightarrow$ ト、ホ) 対角線に対称移動

< 4 次の魔方陣 > 4 (縦) $\times$ 4 (横) = 16 (マス)

$(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16)/4$

$= \{(17 \times 16)/2\}/4 = 34$ (魔法和)

n 次の魔法和は、

$(1+2+3+\dots+n \times n)/n = \{n^2(n^2+1)/2\}/n$

$= n \cdot (1 + n^2) / 2$ (魔法和)

(例題) 魔方陣を完成せよ。

(1)

1		12	8
	16		5
14			
15		6	

 (2)

	1	8	
	6		
	12	13	
5			4

やってみてください。(2)にも挑戦!!)

(例題の略解) 入れる順番で記す。(他のやり方もあり。)

(1)

1	a	12	8
b	16	c	5
14	d	e	f
15	g	6	h

 $a=13, b=4, c=9,$ (2)

a	1	8	b
c	6	d	e
f	12	13	g
5	h	i	4

 $a=11, b=14, h=15,$
 $d=2, g=3, h=10,$ $i=10, d=3,$ 残り 2 7 9 16
 $f=11, e=7$ $c+e=25=9+16, c+f=18=2+16$
 $c=16, e=9, f=2 \rightarrow g=7$

< 4 次の魔方陣の性質 >

魔法和は 34

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

「自由研究」として余力のある人はこの 4 つの性質を証明してみよう。」とあり、やってみた。
場所と数の関係は左図の通り。

① (A) 4 つの●印の和は魔法和の 34

①

●	b	c	●
e	f	g	h
i	j	k	l
●	n	o	●

 $a+b+c+d=34$ $a+f+k+p=34$ $d+g+j+m=34$
 $+) a+e+i+m=34$ $d+h+l+p=34$ $m+n+o+p=34$
 $(a+b+c+d)+(e+f+g+h)+(i+j+k+l)+(m+n+o+p)+2(a+d+m+p)=34 \times 6$
 $\therefore a+d+m+p = 34$

②

a	●	●	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	●	●	p

 $a+b+c+d=34$ $+) m+n+o+p=34$
 $(a+d+m+p)+(b+c+n+o)=68$
 $\therefore b+c+n+o=34$

③

a	b	c	d
●	f	g	●
●	j	k	●
m	n	o	p

 $e+h+i+j=34$

④

a	b	c	d
e	●	●	h
i	●	●	l
m	n	o	p

 $f+g+j+k=34$ ③、④の証明略

② (B) ●印の和は○印の和に等しい

①	●	b	c	●
	e	f	g	h
	i	j	k	l
	m	○	○	p

$$a+b+c+d=34$$

(A)②より

$$\rightarrow b+c+n+o=34$$

$$\therefore a+d=n+o$$

②、③、④の証明略

②	a	○	○	d
	e	f	g	h
	i	j	k	l
	●	n	○	●

$$b+c=m+p$$

③	●	b	c	d
	e	f	g	○
	i	j	k	○
	●	n	○	p

$$a+m=h+l$$

④	a	b	c	●
	○	f	g	h
	○	j	k	l
	m	n	○	●

$$e+i=d+p$$

③ (C) ●印の和は○印の和に等しい

①	●	b	c	d
	e	f	○	h
	i	○	k	l
	m	n	○	●

$$a+f+k+p=34$$

(A)④より

$$\rightarrow f+g+j+k=34$$

$$\therefore a+p=g+j$$

②	a	b	c	●
	e	○	g	h
	i	j	○	l
	●	n	○	p

$$f+k=d+m$$

②の証明略

④ (D) ●印の和は○印の和に等しい

①	a	●	c	d
	e	f	○	h
	i	j	○	l
	m	●	○	p

$$b+f+j+n=34$$

(A)④より

$$\rightarrow f+g+j+k=34$$

$$\therefore b+n=g+k$$

②	a	b	●	d
	e	○	g	h
	i	○	k	l
	m	n	●	p

$$f+j=c+o$$

③	a	b	c	d
	e	○	○	h
	●	j	k	●
	m	n	○	p

$$f+g=i+l$$

④	a	b	c	d
	●	f	g	●
	i	○	○	l
	m	n	○	p

$$e+h=j+k$$

練習問題4 魔方陣を完成せよ。(魔法和、性質をうまく使ってください。)

①	13			12
		14		8
	16			
	4		15	

②	12	1		
			3	
	5			4
			9	2

③	4	1		
	13		8	
	12		9	
				11

(略解) ①

13	a	b	12
c	14	d	8
16	e	f	g
4	h	15	i

c=1、d=11、

e=7、i=5、

g=9、f=2、

b=6、a=3、

h=10

②

12	1	a	b
c	d	3	e
5	f	g	4
h	i	9	2

f=11、g=14、

a=8、b=13、

e=15、h=7、

c=10、i=16、

d=6

③

4	1	a	b
13	c	8	d
12	e	9	f
g	h	i	11

g=5、b=14、

a=15、e=7、

f=6、c=10、

d=3、h=16、

i=2

(解の記入の順番は、他にもありそうです。)

<4次の不思議な魔方陣—完全方陣> と、その <性質>

(完全方陣の例)

① どの2行2列の方陣(9個ある)

1	15	10	8
12	6	3	13
7	9	16	2
14	4	5	11

1	15
12	6

15	10
6	3

16	2
5	11

も、4数の和は魔法和の34

② どの3行3列の方陣(4個ある)も向

1	15	10
12	6	3
7	9	16

15	10	8
6	3	13
9	16	2

6	3	13
9	16	2
4	5	11

かい合う2数の和は魔法和の半分の17

③ 斜め上昇線(3本)

(と対角線)、
斜め下降線(3本)
(と対角線)の4数
の和は魔法和の34

1	15	10	8
12	6	3	13
7	9	16	2
14	4	5	11

$$1+13+16+4=34$$

$$12+15+2+5=34$$

$$7+6+10+11=34$$

$$8+3+9+14=34$$

1	15	10	8
12	6	3	13
7	9	16	2
14	4	5	11

$$1+6+16+11=34$$

$$15+3+2+14=34$$

$$10+13+4+7=34$$

$$8+5+9+12=34$$

④ 第1列を第4列に移しても

15	10	8	1
6	3	13	12
9	16	2	7
4	5	11	14

第1行を第4行に移しても

12	6	3	13
7	9	16	2
14	4	5	11
1	15	10	8

4次の魔方陣が得られる。(完全方陣だと思うが?確認をよろしく。)

<4次の完全方陣は3種類がそれぞれ16通りで、48個>

ケース	縦	横
<1>	1、4、14、15	1、8、12、13
<2>	1、6、12、15	1、8、11、14
<3>	1、7、12、14	1、8、10、15

各ケース(3種類)について、前項の④(行、列の移動)から、 $4 \times 4 = 16$ 個できる。

なお、裏返したり、回転したり、対角線に対称移動して同じものは同じ魔方陣とする。

※ 3つのケースについての数の組合せなど、本には説明があるが省略。他の例などは次回に。