

数学散歩 号外(魔方陣) 2019.10.χ 岐阜市 村山 鐔司
 年甲斐もなく、魔方陣で遊びました。頭が痛くなるかもしれませんが、適当に流し読みして楽しんでください。頭の活性化(?)とヒマツブシにはなりません。
 ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

----- <解説など> -----

「現代数学小事典 寺坂英孝編 BLUE BACKS 講談社」から

m					
↑					
6	16				
5	11	17			
4	7	12	18		
3	4	8	13	19	
2	2	5	9	14	20
1	1	3	6	10	15
	1	2	3	4	5
					→ n

問A 正の整数を左図のようにならべてゆくとき、下から m 段目、左から n 番目に現れる数はいくらか。

(本から：これは高等学校の数学の教科書や問題集で数列の例題としてよく見る問題である。・・・)

答えは

$$h(m, n) = \frac{(m+n)(m+n-1)}{2} - m + 1$$

(問A 略解) $h(m, 1)$ の数列は、1, 2, 4, 7, 11, ... で、その階差数列 1, 2, 3, 4, ... より、
 $h(m, 1) = 1 + (1+2+3+ \dots + (m-1)) = 1 + ((2-1) + (3-1) + \dots + (m-1)) = (1+2+3+\dots+m) - (m-1)$
 同様に、 $h(m, n)$ は、
 $h(m, n) = \frac{(1+2+3+\dots+m) - (m-1) + ((m+1) + (m+2) + \dots + (m+n-1))}{1} - (m-1)$
 $= \frac{(1+2+3+\dots+m) + (m+1) + (m+2) + \dots + (m+n-1) - (m-1)}{1} = (m+n)(m+n-1)/2 - m + 1$

<魔法陣> 「数学散歩 X-7 2020.2.7. α」で扱いましたが、自然数論の数学的帰納法関係の記事に、うまい方法が載っていましたので紹介します。確認しながら数字を入れてみてください。

- 1 最上段中央に 1 を書く。
- 2 n を書きこんだ枠の右上の枠があいていれば、そこに n' ($=n+1$) を書く。
- 3 n を書きこんだ枠が最上段(右上端を除く)にあれば、その右の列の最下段に n' を書く。
- 4 n を書きこんだ枠が最右端(右上端を除く)にあれば、その上の段の最左端に n' を書く。
- 5 n を書きこんだ枠が最右上端であるか、またはその右上の枠がすでに占拠されていれば、n の枠のすぐ下に n' を書く。

<5×5>

17		1		15
11		25		9

(演習) 5×5を完成してください。また、3×3、7×7 の魔法陣はどうなりますか。

<魔法陣の解答>

8	1	6
3	5	7
4	9	2

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

他に、回転、対称移動したのもあり。

(例)

2	7	6
9	5	1
4	3	8

「頭がよくなる！ 大人のIQクイズ 逢沢明 PHP文庫」 分館410.77

<3×3の魔方陣>

2	9	4
7	5	3
6	1	8

憎し可愛し
7 5 3
6 1 坊主に蜂が刺す

回転すると

8	1	6
3	5	7
4	9	2

気になってネットで「魔方陣」を検索したら、いろいろ出てきました。参考までに。

< 4 × 4 の魔方陣 > これまでの方法 (奇数 × 奇数) ではできません。

問

	2	3	
4			1

を完成させてください。

(本の答えを見ないで
やっっては見たが大変!!)

(私の答え)

1 行目と 4 行目
について対称
(2 数の和 17)
を意識して

16	2	3	13
4	14	15	1

(参考 $1+2+3+\dots+14+15 = [(16 \cdot (16+1)) / 2] / 4 = 34$ 行、ヨ、ナ、ノの和は 34)

16	2	3	13
a	b	c	d
p	q	r	s
4	14	15	1

左表のように 行 a+p = 14 …① ナノ b+r = 17 …⑤

すると、 b+q = 18 …② c+q = 17 …⑥

c+r = 16 …③ ヨ a+b+c+d = 34 …⑦

d+s = 20 …④ p+q+r+s = 34 …⑧

②-⑤より、q-r = 1 ∴ q = r+1 …⑨ ②-⑥より、b = c+1 …⑩

既出の 1、2、3、4、13、14、15、16 以外で使える数字は 5、6、7、8、9、10、11、12

① : 14 = 5+9、6+8 以上より、(b, c, q, r) = (6, 5, 12, 11)、(7, 6, 11, 10)、(8, 7, 10, 9)、

② : 18 = 6+12、7+11、8+10 (10, 9, 8, 7)、(11, 10, 7, 6)、(12, 11, 6, 5) の 6 通り

③ : 16 = 5+11、6+10、7+9 b+c = 11、13、15、19、21、23、

④ : 20 = 8+12、9+11 q+r = 23、21、19、15、13、11

(a, p) = (5, 9)、(6, 8)、(8, 6)、(9, 5)、(d, s) = (8, 12)、(9, 11)、(11, 9)、(12, 8) より

(a, d, p, s) = (5, 8, 9, 12)、(5, 12, 9, 8)、(6, 9, 8, 11)、(6, 11, 8, 9)、

(8, 9, 6, 11)、(8, 11, 6, 9)、(9, 8, 5, 12)、(9, 12, 5, 8) の 8 通り

(a+d, p+s) = (13, 21)、(17, 17)、(15, 19)、(17, 17)、(17, 17)、(19, 15)、(17, 17)、(21, 13)

(ア) (b, c, q, r) = (6, 5, 12, 11) のとき、 (イ) (b, c, q, r) = (12, 11, 6, 5) のとき、

b+c = 11、a+d = 34-11 = 23 で不可 b+c = 23、a+d = 11 で不可

(イ) (b, c, q, r) = (7, 6, 11, 10) のとき、 (ウ) (b, c, q, r) = (11, 10, 7, 6) のとき、

b+c = 13、a+d = 21 b+c = 21、a+d = 13

q+r = 21、p+s = 13 q+r = 13、p+s = 21

(a, d, p, s) = (9, 12, 5, 8) (a, d, p, s) = (5, 8, 9, 12)

16	2	3	13
9	7	6	12
5	11	10	8
4	14	15	1

(本の答えの別解)

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

(本の答えと同じ)

(左記(イ)の 2 行目と 3 行目の入れ替え)

(ウ) (b, c, q, r) = (8, 7, 10, 9) のとき、

b+c = 15、a+d = 19

q+r = 19、p+s = 15

(a, d, p, s) = (8, 11, 6, 9) 8、9 同じで不可

(エ) (b, c, q, r) = (10, 9, 8, 7) のとき、

b+c = 19、a+d = 15

q+r = 15、p+s = 19

(a, d, p, s) = (6, 9, 8, 11) 8、9 同じで不可

< 本によるビックリした答えの概略 >

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

対角線を逆順に
⇒

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

(本の答え)

本によれば、正解は **880 通り**
あるとのこと

< 別解として > 本の答えを变形して

2 列目と 3 列目の入れ替え

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

2 行目と 3 行目の入れ替え

16	3	2	13
9	7	6	12
5	10	11	8
4	15	14	1

90° 回転して

13	12	8	1
2	6	11	14
3	7	10	15
16	9	5	4

その他、対称、裏返し・・・いろいろあり。