数学散歩　号外２-1　　　　　　　２０１９．１１．γ　　岐阜市　村山錞司

「数学的に考える 問題発見と分析の技法 ｷｰｽ･ﾃﾞﾌﾞﾘﾝ 冨永星 訳 筑摩書房」中央 BC410.4ﾃﾞ ﾒﾃﾞｨｱｺｽﾓｽ－岐阜市立図書館で出会った本である。（「はじめに」のあとの「この本について」の一文に「・・・この本には練習問題がたくさん載っているので、・・・ただし教科書と違って問題の答えが載っていないが・・・狙いがあってのことだ。・・・」とある。気になった問題と、私の勝手な解釈（？）による解答（無責任）などを紹介しますので、点検とご賞味をよろしく。

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題など（解は後掲）＞

第１章　数学とは何か（解説のみ。25p～45p ）

第２章　言葉を厳密に使う　(49p～124p)

2.1　数学的な言明　練習問題 2.11（1～8 から）

1　p_1、p_2、p_3、…、p_n がすべて素数であるときに、 $N = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_n) + 1$ が必ずしも素数にならないことを示すにはどうすればよいか。

(ﾕｰｸﾘｯﾄﾞの素数定理があり、妙な気分になるが)

2　「男がオペラグラスを手に座っている女を見ている」という文と意味が同じで、しかも意味が曖昧でない（が自然に響く）文を、オペラグラスを男が持っている場合と、女が持っている場合の二通り作りなさい。

3　・・・意図しなかったおかしな意味を生じさせない簡潔な形に書き換えなさい。

(a)　３年前に賃借した名画を紛失。

(b)　娼婦ら、法王に謝意を伝える。

(c)　目抜き通りに大きな穴、市当局が手を入れる。

5　学校に次のような標語が貼ってあった。

おちこんでいたらはげます

この文の二つの意味を書いて、意図しない二つ目の意味を避けられるように書き直しなさい。

ϕ	ψ	$\phi\Rightarrow\psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

2.2　論理結合子「かつ」、「または」、「でない」

「かつ(and)」$\phi\wedge\psi$、「または(or)」$\phi\vee\psi$、「でない(not)」$\neg\phi$

2.3　ならば　「ならば(implies)」$\phi\Rightarrow\psi$

$\phi\not\Rightarrow\psi$（$\neg$（$\phi\Rightarrow\psi$）の定義

：ϕが真（T）でψが偽（F）のときに限って真（T）

練習問題 2.3.3（1～6 から）

1　次のどれが真でどれが偽か。((a)～(j) から)

(a)　$(\pi^2 > 2) \Rightarrow (\pi > 1.4)$

(f)　$\neg$（５は整数）$\Rightarrow$ $(5^2 \geqq 1)$

(i)　（象は木に登れる）$\Rightarrow$（３は無理数）

○　双条件法　$(\phi\Rightarrow\psi)\wedge(\psi\Rightarrow\phi)$ の略号として　$\phi\Leftrightarrow\psi$

○　真理値がすべてＴになるような言明のことを「トートロジー（恒真式）である」という。

練習問題 2.3.4（1～8 から）

真理票を使って次がトートロジーであることを示せ。

2　$(\phi\Rightarrow\psi)\Leftrightarrow(\neg\phi\vee\psi)$

3　$(\phi\not\Rightarrow\psi)\Leftrightarrow(\phi\wedge\neg\psi)$

2.4　量化子

（初めて見た単語である。量記号とか束縛記号とよんでいる本もある。）

・・・が存在する（there exist）　：　∃　　存在量化子

すべての・・・（for all）　：　∀　　全称量化子

（以上二つ）量化子（quantifier）

練習問題 2.4.1（概略）

「ぐらぐらテーブル定理」 レストランで真四角のテーブルに四本の脚が四隅についているが、床が平らでないためにがたつく。・・・（解決法として）ぐるりと回してがたつかない場所を探せばよい。この事実を立証せよ。

＜量化子の使用例など＞

$(\forall m \in N)(\exists n \in N)(n > m)$ は T 、$(\exists n \in N)(\forall m \in N)(n > m)$ は F

。 $\neg[\forall x\, A(x)]$ は $\exists x\,[\neg A(x)]$ と同値　　。 $\neg[\exists x\, A(x)]$ は $\forall x\,[\neg A(x)]$ と同値

∃！：　・・・のような x がただ一つ（unique 「一意的に」とも）存在する。
。　∃！x　ϕ(x)　：∃x（ ϕ(x)∧∀y［ ϕ(y) ⇒ x = y ］）の省略したもの

練習問題 2.4.5（ 1～ 7 から）

2　次の言明のなかで真なのはどれか。対象となる領域は実数とする。(a)～(p) から）

(c)　$\exists x\ (x^2 + 1 = 2^x)$　　(ℓ)　$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (xy = xz)$

(j)　$\forall x\ \exists! y\ (y = x^2)$　　(p)　$\forall x\ [\ x < 0 \Rightarrow \exists y\ (y^2 = xz)\ ]$

7　実関数 f(x) が x = a で連続であることは一般に次のように定義される。

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x)\ [\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\ ]$

これを踏まえて f(x) が x = a で不連続であることを形式的に定義しなさい。ただし、定義は肯定的な形で述べること。

＜解答など＞

練習問題 2.11

1　p_1、p_2、p_3、…、p_n がすべて素数であるときに、 $N = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_n) + 1$ が必ずしも素数にならないことを示すにはどうすればよいか。

（解）奇素数の積に１を加えれば２の倍数になり素数ではない。　（例として 3・5+1 = 16 = 24 ）

2　「男がオペラグラスを手に座っている女を見ている」という文と意味が同じで、しかも意味が曖昧でない（が自然に響く）文を、オペラグラスを男が持っている場合と、女が持っている場合の二通り作りなさい。

（解の例）・ 男が持っている場合：　「座っている女を、男がオペラグラスを手にして見ている」
　　　　　・ 女が持っている場合：　「オペラグラスを手にして座っている女を、男が見ている」

3　・・・意図しなかったおかしな意味を生じさせない簡潔な形に書き換えなさい。

(a)　３年前に賃借した名画を紛失。
(b)　娼婦ら、法王に謝意を伝える。
(c)　目抜き通りに大きな穴、市当局が手を入れる。

（解）　（後の（　）内には別の意味になるもの）

(a)　３年前に、賃借した名画を紛失したことがある。
　　（３年前に賃借した名画を、この前紛失した。）

(b)　娼婦らは、法王に謝意を伝えている。
　　（娼婦らが法王に謝意を述べているのを、伝える。）

(c)　目抜き通りにできた大きな穴があり、市当局が手を入れる。
　　（目抜き通りに、市当局が手を入れ大きな穴をあける。）

5　学校に次のような標語が貼ってあった。

　　おちこんでいたらはげます

この文の二つの意味を書いて、意図しない二つ目の意味を避けられるように書き直しなさい。

〔一つ目〕　おちこんでいる人がいたら、はげまして元気づけてね
〔二つ目〕　おちこんでいると、頭が禿げますよ

練習問題 2.3.3

1　次のどれが真でどれが偽か。((a)～(j) から）

(a)　$(\pi^2 > 2) \Rightarrow (\pi > 1.4)$
(f)　¬（ ５は整数） ⇒ $(5^2 \geqq 1)$
(i)　（象は木に登れる） ⇒ （３は無理数）

(a) T (f) T (i) T

練習問題 2.3.4

真理票を使って次がトートロジーであることを示せ。

2　$(\phi \Rightarrow \varphi) \Leftrightarrow (\neg\phi \vee \varphi)$
3　$(\phi \not\Rightarrow \varphi) \Leftrightarrow (\phi \wedge \neg\varphi)$

（解）2　　3

ϕ	φ	$\phi \Rightarrow \varphi$	$\neg\phi$	$\neg\phi \vee \varphi$	$(\phi \Rightarrow \varphi) \Leftrightarrow (\neg\phi \vee \varphi)$	$\phi \not\Rightarrow \varphi$	$\neg\varphi$	$\phi \wedge \neg\varphi$	$(\phi \not\Rightarrow \varphi) \Leftrightarrow (\phi \wedge \neg\varphi)$
T	T	T	F	T	T	F	F	F	T
T	F	F	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	T	F	T	F	T

練習問題 2.4.1　（以降の答は次回へ）