数学散歩　号外２-2　　　　　　　　２０１９．１１　δ　　岐阜市　村山錞司

「数学的に考える 問題発見と分析の技法 ｷｰｽ･ﾃﾞﾌﾞﾘﾝ 冨永星 訳 筑摩書房」中央 BC410.4ﾃﾞ ﾒﾃﾞｨｱｺｽﾓｽ－岐阜市立図書館で出会った本である。（「はじめに」のあとの「この本について」の一文に「・・・この本には練習問題がたくさん載っているので、・・・ただし教科書と違って問題の答えが載っていないが・・・狙いがあってのことだ。・・・」とある。気になった問題と、私の勝手な解釈（？）による解答（無責任）などを紹介しますので、点検とご賞味をよろしく。

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題など（解は後掲）＞

第２章　言葉を厳密に使う　(49p～124p)

2.4　量化子

第３章　証明 (127p～160p)

3.1　証明とは何か　　3.2　矛盾による証明　　3.3　条件法による証明　　（以上、略）

3.4　量化子を含む言明の証明

定理　r^s が有理数となるような無理数 r、s が存在する。

（再掲 「数学散歩」で扱ったことあり。）

練習問題 3.4.1 (1～9 から)

5　「$m^2 + mn + n^2$ が完全平方であるような整数 m、n が存在する。」という主張を証明するか、誤りであることを示しなさい。

6　いかなる正の数 m についても、mn + 1 が完全平方になるような正の数 n が存在することを証明しなさい。

9　2 より大きな偶数はすべてすべて二つの素数の和で書ける（ゴールドバッハの予想）とすると、5 より大きな奇数はすべて三つの素数の和で表せることを証明しなさい。

3.5　帰納法による証明

練習問題 3.5.2 (1～4 から)

2　次の事実を帰納法で証明しなさい。

(a)　4n-1 は 3 で割り切れる。

(b)　$n \geqq 5$ であるすべての n について　$(n+1)! > 2^{n+3}$

第４章　数を巡る成果の証明(163p～198p)

4.1　整数

＜奇数の平方は、すべて 8 の倍数より 1 大きい＞

（本と異なる証明）　$(2n+1)^2 = 4n(n+1) + 1 = 8k + 1$

（n(n + 1) は連続 2 整数の積で偶数で 2k として）

練習問題 4.1.4 (1～3 から)

2　数論の未解決問題の一つに「双子の素数は無限個あるか」という問題がある。双子の素数とは 3 と 5、11 と 13、71 と 73 のように、その差が 2 の素数の対のことである。今、素数の三つ子（その差がどちらも 2 であるような 3 つの素数）が 3、5、7 の一組に限ることを証明しなさい。

練習問題 4.1.5 (1～3 から)

1　「ユークリッドの補題： p が素数であるとき、積 ab が p で割り切れれば、a か b の少なくとも片方が p で割り切れる」を証明しなさい。

4.2　実数　　4.3　完備性　　4.4　数列　　(以上略)

補遺　集合論　(略)

---- <解答など> ----

＜前回から＞ 練習問題 2.4.1（概略）

「ぐらぐらテーブル定理」 レストランで真四角のテーブルに四本の脚が四隅についているが、床が平らでないためにがたつく。・・・（解決法として）ぐるりと回してがたつかない場所を探せばよい。この事実を立証せよ。

（答えをつくってみた）四本の脚を順にa、b、c、d として、a、b、c の脚は床につき、d が短くてぐらぐらとする。d を床につければ、反対側の b の脚が上がる。床に対して、a、c が長くて b、d が短いから a、d と b、c の位置を変えれば、どこかでバランスがとれる。

練習問題 2.4.5

2 次の言明のなかで真なのはどれか。対象となる領域は実数とする。(a)～(p) から)

(c) $\exists x\ (\ x^2 + 1 = 2^x\ )$　　(ℓ) $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (\ xy = xz\ )$

(j) $\forall x\ \exists !\, y\ (\ y = x^2\ )$　　(p) $\forall x\ [\ x < 0 \Rightarrow \exists y\ (\ y^2 = xz\ )\ ]$

(答え) (c) ○ (j) ○ (ℓ) × (p) ×

7 実関数 f(x) が x = a で連続であることは一般に次のように定義される。

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x\ )\ [\ |\ x - a\ | < \delta \Rightarrow |\ f(x) - f(a)\ | < \varepsilon\ ]$

これを踏まえて f(x) が x = a で不連続であることを形式的に定義しなさい。ただし、定義は肯定的な形で述べること。

(答え) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x\ )\ [\ |\ x - a\ | < \varepsilon \Rightarrow |\ f(x) - f(a)\ | > \delta\ ]$

定理 r^s が有理数となるような無理数 r、s が存在する。

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数であれば、$r = s = \sqrt{2}$ とすればよい。

無理数なら、$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ で $r = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$、$s = \sqrt{2}$ とすればよい。

練習問題 3.4.1

5 「$m^2 + mn + n^2$ が完全平方であるような整数 m、n が存在する。」という主張を証明するか、誤りであることを示しなさい。

(証１) n = 0 とすれば、m^2 となる。　　(証２) m = -n とすれば、n^2 となる。

6 いかなる正の数 m についても、mn + 1 が完全平方になるような正の数 n が存在することを証明しなさい。

(証明) $mn + 1 = m(m + 2) + 1 = (m + 1)^2$ より n = m + 2 とすればよい。

9 2 より大きな偶数はすべてすべて二つの素数の和で書ける（ゴールドバッハの予想）とすると、5 より大きな奇数はすべて三つの素数の和で表せることを証明しなさい。

(略証) 5 + 2n = 3 + 2(n + 1) = 3 + p + q (p 、q は素数) とすればよい。

練習問題 3.5.2

2 次の事実を帰納法で証明しなさい。

(a) 4n-1 は 3 で割り切れる。

(b) $n \geqq 5$ であるすべての n について $(n+1)! > 2^{n+3}$

(略証) (a) n=1 のとき 3 で成立　n=2 のとき 7 で 3 で割り切れない　これは事実（！）

(b) (Ⅰ) n=5 のとき 左辺 = 6・5・4・3・2・1 = 720　右辺 = 2^8 = 256 で成立

(Ⅱ) n=k のとき $(k+1)! > 2^{k+3}$ を仮定

n=k+1 のとき $(k+2)! > (k+2)\cdot(k+1)! > 2\cdot 2^{k+3} > 2\cdot 2^{k+4}$ 成立

以上から、数学的帰納法により、不等式は成立する。

練習問題 4.1.4

2 数論の未解決問題の一つに「双子の素数は無限個あるか」という問題がある。双子の素数とは 3 と 5、11 と 13、71 と 73 のように、その差が 2 の素数の対のことである。今、素数の三つ子（その差がどちらも 2 であるような 3 つの素数）が 3、5、7 の一組に限ることを証明しなさい。

(略証) その差が 2 であるような 4 以上の 3 個の数の中には必ず 3 の倍数が 1 個ある。

(参考) (他の本から)

三つ子素数： p、p+2、p+6 が三つとも素数の場合　(5,7,11)、(11,13,17)、・・・

四つ子素数： p、p+2、p+6、p+8 が四つとも素数の場合　(5,7,11,13)、(11,13,17,19)、・・・

練習問題 4.1.5 (1～3 から)

1 「ユークリッドの補題： p が素数であるとき、積 ab が p で割り切れれば、a か b の少なくとも片方が p で割り切れる」を証明しなさい。

(略証) x、y が互いに素である整数であれば、rx + sy = 1 である整数 r、s がある。

a、p が互いに素とすると、rp + sa = 1 とでき、ab が p で割り切れれば、brp + sab = b、ab = pt だから、b = p(br + st) より、b は p の倍数。以上から、a、b のどちらかは p で割り切れる。