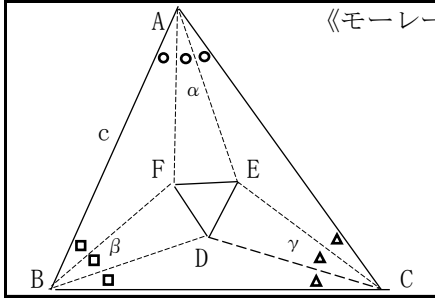


2017.7.χ 数学散歩 寄り道-3 で扱っていますが、証明を手直ししてみました。よろしく。



《モーレーの定理》「3 角形の各辺の両端における内角の 3 等分線うち、各辺に近いもの同士の交点は、1 つの正三角形をつくる。」

<準備として> (しばらく再掲)

$$\angle A = 3\alpha, \angle B = 3\beta, \angle C = 3\gamma, \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ / 3 = 60^\circ$$

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = -4\sin\theta(\sin^2\theta - 3/4)$$

$$(\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \text{ より})$$

$$= -4\sin\theta(\sin^2\theta \cdot 1/4 - \cos^2\theta \cdot 3/4)$$

$$= -4\sin\theta\{(\sin\theta \cdot \cos 60^\circ)^2 - (\cos\theta \cdot \sin 60^\circ)^2\}$$

$$= -4\sin\theta \sin(\theta + 60^\circ) \sin(\theta - 60^\circ)$$

(証明) (上図参照) $\triangle AFB$ と $\triangle ABC$ で

$$\frac{AF}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{c}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad \frac{c}{\sin 3\gamma} = 2R \quad (R \text{ は } \triangle ABC \text{ の外接円の半径})$$

$$\alpha + \beta = 60^\circ - \gamma, \quad c = 2R \sin 3\gamma = -8R \sin\gamma \sin(\gamma + 60^\circ) \sin(\gamma - 60^\circ)$$

$$\therefore AF = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin(60^\circ - \gamma)} = 8R \sin\beta \sin\gamma \sin(\gamma + 60^\circ)$$

同様に、 $AE = 8R \sin\beta \sin\gamma \sin(\beta + 60^\circ)$

よって、 $\triangle AEF$ で

$$EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2AE \cdot AF \cdot \cos\alpha$$

$$= (8R \sin\beta \sin\gamma)^2$$

$$\times \{\sin^2(\beta + 60^\circ) + \sin^2(\gamma + 60^\circ) - 2\sin(\beta + 60^\circ)\sin(\gamma + 60^\circ)\cos\alpha\}$$

そこで $\{ \}$ の中が $\sin^2\alpha$ になれば、 $EF^2 = (8R \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma)^2$ となって都合がいい。

◎ $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$ のとき、

$$\{\sin^2(\beta + 60^\circ) + \sin^2(\gamma + 60^\circ) - 2\sin(\beta + 60^\circ)\sin(\gamma + 60^\circ)\cos\alpha\} = \sin^2\alpha$$

を示したい。(以後、修正箇所あり)

$$\beta + 60^\circ = P, \quad \gamma + 60^\circ = Q \quad \text{とすると、} \alpha + P + Q (= \alpha + \beta + \gamma + 120^\circ) = 180^\circ$$

として次の等式を証明する。

$$\alpha + P + Q = 180^\circ \text{ のとき、} \sin^2\alpha + 2\sin P \sin Q \cos\alpha = \sin^2 P + \sin^2 Q$$

(証明) $\alpha = 180^\circ - (P + Q)$ だから $\sin^2\alpha = \sin^2(P + Q)$ 、 $\cos\alpha = -\cos(P + Q)$

$$(\text{左辺}) = \sin^2(P + Q) - 2\sin P \sin Q \cos(P + Q)$$

$$= \sin^2 P \cos^2 Q + 2\sin P \cos Q \cos P \sin Q + \cos^2 P \sin^2 Q$$

$$- 2\sin P \sin Q (\cos P \cos Q - \sin P \sin Q)$$

$$= \sin^2 P (1 - \sin^2 Q) + (1 - \sin^2 P \sin^2 Q) + 2\sin^2 P \sin^2 Q$$

$$= \sin^2 P + \sin^2 Q = (\text{右辺})$$

以上より、

$$EF^2 = (8R \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma)^2$$

同様に、 $FD^2 = DE^2 = (8R \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma)^2 \quad \therefore FD^2 = DE^2 = EF^2$

となって、 $\triangle DEF$ は正三角形になる。