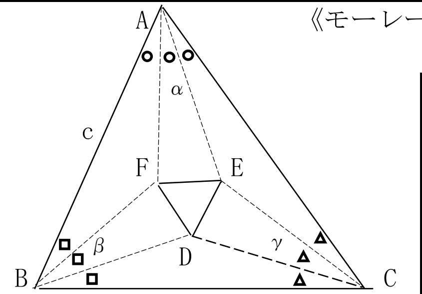
数学散歩　＜参考+α＞　【モーレーの定理】再修正　2021.3.χ　　岐阜市　村山錞司

数学散歩　2017.7.χと 2020.12.χで扱っていますが、証明の再修正をしました。ｽﾐﾏｾﾝﾖﾛｼｸ！！



《モーレーの定理》「３角形の各辺の両端における内角の３等分線うち、各辺に近いもの同士の交点は、１つの正三角形をつくる。」

（しばらく下線部分まで同じ）　＜準備として＞

$\angle A = 3\alpha$、$\angle B = 3\beta$、$\angle C = 3\gamma$、$\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ/3 = 60^\circ$

$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = -4\sin\theta(\sin^2\theta - 3/4)$

$(\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より)

$= -4\sin\theta(\sin^2\theta\cdot 1/4 - \cos^2\theta\cdot 3/4)$

$= -4\sin\theta\{(\sin\theta\cdot\cos 60^\circ)^2 - (\cos\theta\cdot\sin 60^\circ)^2\}$

$= -4\sin\theta\sin(\theta+60^\circ)\sin(\theta-60^\circ)$

（証明）（上図参照）△AFB と△ABC で

$$\frac{AF}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin(180^\circ-\alpha-\beta)} = \frac{c}{\sin(\alpha+\beta)}、\frac{c}{\sin 3\gamma} = 2R$$ （R は△ABC の外接円の半径）

$\alpha+\beta = 60^\circ-\gamma$　、　$c = 2R\sin 3\gamma = -8R\sin\gamma\sin(\gamma+60^\circ)\sin(\gamma-60^\circ)$

$$\therefore\ AF = \frac{c\cdot\sin\beta}{\sin(60^\circ-\gamma)} = 8R\sin\beta\sin\gamma\sin(\gamma+60^\circ)$$

同様にして、 $AE = 8R\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta+60^\circ)$

よって、△AEF で

$EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2\,AE\cdot AF\cdot\cos\alpha$

$= (8R\sin\beta\sin\gamma)^2$

$\times\ \{\sin^2(\beta+60^\circ) + \sin^2(\gamma+60^\circ) - 2\sin(\beta+60^\circ)\sin(\gamma+60^\circ)\cos\alpha\}$

そこで{ }の中が $\sin^2\alpha$ になれば、 $EF^2 = (8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2$　となって都合がいい。

◎　$\alpha+\beta+\gamma = 60^\circ$ のとき、

$\sin^2(\beta+60^\circ)+\sin^2(\gamma+60^\circ) - 2\sin(\beta+60^\circ)\sin(\gamma+60^\circ)\cos\alpha = \sin^2\alpha$

を示したい。$\beta+60^\circ = P$ 、$\gamma+60^\circ = Q$ とすると、$\alpha + P + Q\ (= \alpha+\beta+\gamma + 120^\circ) = 180^\circ$

より $\sin^2 P + \sin^2 Q - 2\sin P\sin Q\cos\alpha = \sin^2\alpha$　だから移項して次の等式を証明する。

$\alpha + P + Q = 180^\circ$ のとき、 $\sin^2\alpha + 2\sin P\sin Q\cos\alpha = \sin^2 P + \sin^2 Q$

（証明）　$\alpha = 180^\circ - (P + Q)$ だから　$\sin^2\alpha = \sin^2(P+Q)$、$\cos\alpha = -\cos(P+Q)$

（左辺）$= \sin^2(P+Q) - 2\sin P\sin Q\cos(P+Q)$

$= \sin^2 P\cos^2 Q + 2\sin P\cos Q\cos P\sin Q + \cos^2 P\sin^2 Q$

$- 2\sin P\sin Q(\cos P\cos Q - \sin P\sin Q)$

$= \sin^2 P(1-\sin^2 Q) + (1-\sin^2 P)\sin^2 Q + 2\sin^2 P\sin^2 Q$

$= \sin^2 P + \sin^2 Q$ ＝（右辺）

以上より、

$EF^2 = (8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2$

同様にして、 $FD^2 = DE^2 = (8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2$　$\therefore\ FD^2 = DE^2 = EF^2$

となって、△DEF は正三角形になる。