数学散歩　XI-1　　　　　　　　　　２０２０．４．　α　　岐阜市　村山錞司

「いかにして問題をとくか　柿内賢信訳 G.ポリア著 丸善出版」その１

(How to Solve It By G.Polya)

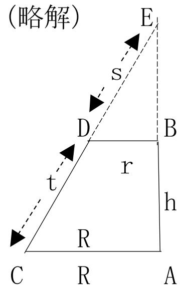
前回の「数学の問題の発見的解き方」の姉妹編の本です。面白そうな問題などを紹介します。

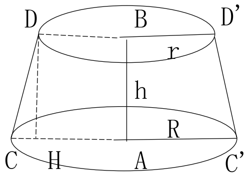
ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題、解説など＞

(53p) 高さ h 、底面の半径は上が r 、下が R である直円錐截頭体の斜面の面積 S を求めよ。

（略解）





（参考図）

（参考 「数学散歩 X-8」

$AC = R$、$BD = r$、$BA = DH = h$

$CD = \sqrt{(R-r)^2+h^2} = t$、$DE = s$

三角形の相似から　$s/r = (s+t)/R$

$sR = sr + tr$ 、$s = tr / (R-r)$

ED を EB（中心軸）の周りに回転したときの側面積は　$\pi s^2 \cdot (2\pi r/2\pi s) = \pi sr$

DC を BA の周りに回転したときの側面積は

$\pi(s+t)R - \pi sr = \pi\{tr/(R-r)+t\}R - \pi tr^2/(R-r)$

$= \pi t(R^2-r^2)/(R-r) = \pi t(R+r) = \pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2+h^2}$　（答）

(61p) 4 ℓ（ﾘｯﾄﾙ）と 9 ℓ の 2 つの桶しかもっていないとき、ちょうど 6 ℓ の水をくむにはどうすればよいか。

（略解）2 つの桶の中の水の量の推移について、　（ 9 ℓ の桶の水の量 , 4 ℓ の桶の水の量 ）として、　(9,0)→(5,4)→(5,0)→(1,4)→(1,0)→(0,1)→(9,1)→(6,4)→(6,0)

（質問）1、4、5、6、9 ℓ の水はくむことができるが、他の 2、3、7、8 ℓ については？

第Ⅳ部 問題・ヒント・解答（問題 20 問 に続いて、それぞれのヒントと解答（225p～246p))

３　ボブは 10 のポケットと 44 の 1 ドル銀貨をもっている。彼はどのポケットにも違った数だけの 1 ドル銀貨を入れたいと思っているが、それは実際に可能か。

（略解） 10 のポケットに順に、0 ドル、1 ドル、・・・と入れていくと、10 番目には 9 ドルとなり、$0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 9\times10 / 2 = 45$ ドル必要、1 ドル不足で不可能。

（どこかのポケットの中の 1 ドル銀貨が同じ数になる。）

４　部厚な本のページの数字を印刷するのに全部で 2989 個の数字を使った。本のページ数は何ページか。

ページ数	数字の個数		
1～9	9-1+1	=	9
10～99	2×(99-10+1)	=	180
100～999	3×(999-100+1)	=	2700

（略解） 1 ページから 999 ページまで 9+180+2700 = 2889 個の数字が必要。1000 ページは４桁で、2989-2889 = 100、100÷4 = 25 、 1000～1024　の 25 個だから、本のページ数は 1024 ページ（答）

５　おじいさんの書類の中から、次のような古い請求書が出てきた。それには 72 羽の七面鳥の代金___67.9___と書いてあるが、___のところには数字（1 個）が消えて読めなくなっている。2 つの___に相当する数字を求めよ。また 1 羽あたりの値段はいくらか。

（略解）　小数点を無視して、a ６ ７ ９ b　が $72 = 8\times9$ の倍数になればよい。679 に目をやって 8 の倍数について、$8\times5\times5\times5 = 1000$ だから、a6000 + 800 = a ６ ８ ０ ０ は 8 の倍数で、

a ６ ８ ０ ０ − 8 = a ６ ７ ９ ２ も 8 の倍数。b = 2

9 の倍数について、a + 6 + 7 + 9 + 2 = a + 24 が 9 の倍数。a = 3　よって、367.92（答）

1 羽あたりの値段は、367.92 ÷ 72 = 5.11　よって、5.11 （ドル？）（答）

１４　方程式 $x^4 - (3m+2)x^2 + m^2 = 0$ の根が 4 つともすべて実数で、しかも 1 つの算術級数（等差数列）をなすためには、m の値はどのようでなければならないか。

（略解）　a が根であれば -a も根になる。a ＞ 0 とし a を最小の正根としてよい。

$a - (-a) = 2a$ より公差は 2a で、他の 2 つは 3a 、-3a 。

$(x^2 - a^2)(x^2 - 9a^2) = x^4 - 10a^2x^2 + 9a^4 = 0$　より、$3m+2 = 10a^2$ 、$m^2 = 9a^4$

$(3m+2)^2 = 100a^4 = 100\cdot(m^2/9)$ より、$81m^2 + 108m + 36 = 100m^2$

$19m^2 - 108m - 36 = 0$　∴　$m = 6$、$-6/19$

（点検）$m = 6$ のとき、$x = \pm\sqrt{2}$、$\pm3\sqrt{2}$ 、$m = -6/19$ のとき、$x = \pm\sqrt{2/19}$、$\pm3\sqrt{2/19}$

(61p の質問の答)

→(6,0)→(2,4)→(2,0)→(0,2)→(9,2)→(7,4)→(7,0)→(3,4)→(3,0)→(0,3)→(9,3)→(8,4)

１７　級数の和 $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}$ は n = 1、2、3 に対してそれぞれ $\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{5}{6}$ および $\dfrac{23}{24}$ である。これらの結果から任意の n に対する和を表わす式を推定し、それを証明せよ。

（略証）　与式 $= 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$ と推定し、数学的帰納法で証明する。

（Ⅰ）　n = 1 のとき、（左辺） = 1/2 、（右辺） = 1/2 　で成立

（Ⅱ）　n = k のとき、 $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots+\dfrac{k}{(k+1)!} = 1 - \dfrac{1}{(k+1)!}$

の成立を仮定し、n = k+1 について調べる。

n = k+1 のとき、

$$\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{k}{(k+1)!}+\frac{k+1}{(k+2)!} = 1-\frac{1}{(k+1)!}+\frac{k+1}{(k+2)!} = 1-\frac{1}{(k+2)!}$$

n = k+1 のとき成立する。（Ⅰ）、（Ⅱ）によりすべての自然数 n について成立する。

１８

1 = 1
3+5 = 8
7+9+11 = 27
13+15+17+19 = 64
21+23+25+27+29 = 125

表をよく見て、ここに示されている一般法則を表わし、証明せよ。

（略解と略証）各行の最初の数は、1、3、7、13、21、・・・

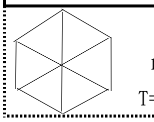
階差数列は、2、4、6、8、・・・、2n、・・・

一般項は、1+2{1+2+・・・+2(n−1)} = n^2-n+1

第 n 行の左辺の末項は　$(n^2-n+1) + 2(n-1) = (n^2+n-1)$

n 行の和は　$(n^2-n+1) + (n^2-n+3) + (n^2-n+5) + \cdots + (n^2+n-1) = n(2n^2)/2 = n^3$

１９　正６角形の１辺の長さを n（ n は正整数)とする。各々の辺に平行で互いに等間隔の 3 組の平行線によって正６角形を、１辺の長さが 1 の正三角形 T 個に分割する。このとき、分割した正三角形の頂点の数を V 、辺の数を L とする。ただし、それぞれ重複して数えないとする。n = 1 なら、T = 6、V = 7、L = 12 である。一般に、n を使って T、V、L を推定せよ。証明ができればなお望ましい。

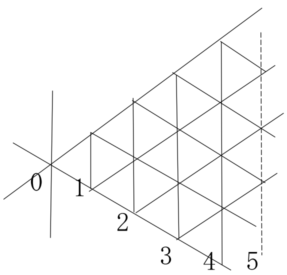


（ﾁｪｯｸ）
n = 1 のとき
T=6、V=7、L=12

（略解）＜頂点の数 V ＞

中心点 1 個、周辺で 1 辺の長さが 1 増えるごとに、6 個増加、

V = 1 + 6(1 + 2 + ・・・ + n) = 1 + 6n(n+1)/2 = $\underline{3n^2 + 3n + 1}$



＜1 辺の長さが 1 の正三角形の個数 T ＞

正６角形を、中心を通る 6 本の直線で 6 個の正三角形に分割し、それぞれの、辺の長さが 1 の小正三角形の個数の増え方をみれば、

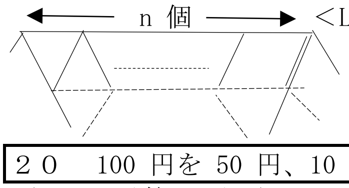
T = 6{1 + 3 + 5 + … + (2n−1)} = $\underline{6n^2}$

＜辺の数 L ＞

小正三角形の 3 辺には、三つの辺があるが、正６角形の内部では隣りどうし重なるが、周の 6n 個の辺では 1 回のみで、

2L = 3T + 6n = $18n^2 + 6n$ 　∴　L = $\underline{9n^2 + 3n}$

（参考： V − L + T = 1 。オイラーの定理（平面））



＜L の別解＞ 1 辺の長さ n の正６角形の周の１辺にぶら下る n 個の小正三角形の辺の総数は両端と隣の辺との重なりを考慮して 3n−1 個、6 辺で 6(3n−1) = 18n−6 、1〜n を加えて、

L = 12 + 30 + ・・・ + (18n−6) = n(9n + 3) = $\underline{9n^2 + 3n}$

２０　100 円を 50 円、10 円、5 円、1 円に両替えするには何通りの方法があるか。

（私の手計算から）（表を判読してください）

《100 円を両替え （略表）》

50 円	2	1〜													0〜					（個）	
10 円	0	5	4	4	4	3	3 〜	3	2 〜	2	1 〜	1	0 〜	0	10	9	9	9	8 〜	0	0
5 円	0	0	2	1	0	4	3 〜	0	6 〜	0	8 〜	0	10 〜	0	0	2	1	0	4 〜	1	0
1 円	0	0	0	5	10	0	5 〜	20	0 〜	30	0 〜	40	0 〜	50	0	0	5	10	0 〜	95	100
何通り	1	1		3			5		7		9		11		1			〜		21	

50 円が 2 個のとき、1 通り。1 個のとき、1+3+5+7+9+11 = 36 通り。

50 円が 0 個のとき、1+3+5+〜+21 = 121 通り。全部で、1+36+121 = 158 通り。

（本では、漸化式などの説明もあり。50 円には 37 通りなど、5 円刻みの 50 円までの表はあるが、100 円についての答は、なぜかない。）　次回へ・・・