

「いかにして問題をとくか 柿内賢信訳 G. ポリア著 丸善出版」その2 + おまけ
(How to Solve It By G. Polya)

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

----- <問題、解説など> -----

20 100 円を 50 円、10 円、5 円、1 円に両替するには何通りの方法があるか。(再掲)

(何か気になり、もう一回扱います。よろしく)

(本の解答の概要と追加)

- A_n : n 円を 1 円だけに両替する仕方の数
- B_n : 1 円と 5 円 "
- C_n : 1 円と 5 円と 10 円 "
- D_n : 1 円と 5 円と 10 円と 50 円 "

少し注意すれば、 $A_0 = B_0 = C_0 = D_0 = 1$
(添え数字がマイナスのものはすべて 0)

$$D_n = C_n + D_{n-50}$$

$$C_n = B_n + C_{n-10}$$

$$B_n = A_n + B_{n-5} \quad A_n = 1 \text{ (追加)}$$

ここでは、n = 50 までを表にしたが、n = 100 に対する答も同様に求めることができる。

金額	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
A_n	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C_n	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	37
D_n	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	37

(として n = 100 の表はない。)

上記の漸化式によれば、

$$D_{50} = C_{50} + D_0 \quad \text{より、} 37 = 37 + 1 ?$$

$$C_{50} = B_{50} + C_{40} \quad \text{で} \quad C_{50} = 11 + 25 = 36$$

$C_{50} = 36$ の誤りと思われる。

< $C_{50} = 36$ の確認>

10 円	5	4	4	4	3	3	3	3	3	2	~	2	1	~	1	0	~	0
5 円	0	2	1	0	4	3	2	1	0	6	~	0	8	~	0	10	~	0
1 円	0	0	5	10	0	5	10	15	20	0	~	30	0	~	40	0	~	50
何通り	1	3			5					7			9			11		

$$1+3+5+7+9+11 = 36$$

<漸化式について>

- ◎ $B_n = A_n + B_{n-5}$ 、 $C_n = B_n + C_{n-10}$ 、 $D_n = C_n + D_{n-50}$ について
n 円を 1 円と 5 円に両替する (B_n) のに、1 円のみ (A_n) なのか、5 円を 1 枚入れると残りは n-5 円 (B_{n-5}) となるから、 $B_n = A_n + B_{n-5}$ 他も同様。

<表の作り直し> (0~0、1、2、3、4 などの略) 点検をよろしく

金額	0~	5~	10~	15~	20~	25~	30~	35~	40~	45~	50~
A_n	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C_n	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36
D_n	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	37

金額	55~	60~	65~	70~	75~	80~	85~	90~	95~	100
A_n	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B_n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
C_n	42	49	56	64	72	81	90	100	110	121
D_n	44	53	62	69	84	97	110	125	140	158

- ・ 漸化式でチェック (例) $D_{97} = C_{97} + D_{47}$ $140 = 110 + 30$ OK

《 + おまけ 》

スペースを利用して、おまけの話題を紹介

- (A) 「ふしぎな数学 ノーテッポ」 松井政太郎訳 みすず書房

◎ 簡単な掛け算 (2 で割る) (2 を掛ける)

- (例) 49×85 49 85 2) 49 ...1
- ・ 左側の奇数を 2 で割る 24 ~~170~~ 2) 24 ...0
- とき、余りは切り捨て 12 ~~340~~ 2) 12 ...0
- ・ 左側が偶数のときの向 6 ~~680~~ 2) 6 ...0
- かい側は、すべて消す 3 1360 2) 3 ...1
- ・ 残った右側を足すと答 1 +) 2720 1

<2 進法による解釈> 左側 (49) を 2 進法で表わす

$$\begin{aligned}
 49 \times 85 &= (1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \times 85 \\
 &= (32 + 16 + 0 + 0 + 0 + 1) \cdot 85 \\
 &= 2720 + 1360 + 85 \\
 &= 4165
 \end{aligned}$$

◎ 「すべての規則には例外がある」

- (1) すべての規則には例外がある
- (2) (1)は規則です
- (3) それゆえ、(1)にも例外がある
- (4) それゆえ、すべての規則には例外はない

この規則の例外とは何を指すのか? ... (頭が変になる!!!)

(「例外のない規則はない」???)

(B) 「人生を間違えないための大人の確率ドリル 開発社」

Question 34 (LEVEL 1~4、超難問 うちの LEVEL 4)

日本シリーズが最終戦を第 7 試合までもつれ込む確率は? 3 択で ① 72%、② 55%、③ 31%

(本の解答から) ③ 31%

(解説としていろいろ記載はあるが、何故か 31%の数字の根拠は示されていない。)

(略解として) 第 6 試合までに決着がつくのは、一方のチームが、

① 4 連勝か、4 連敗 $\frac{1}{2^4} \cdot 2 = \frac{1}{8}$

② 第 5 試合目で 4 勝 1 敗か、1 勝 4 敗で決着 ${}_4C_3 \cdot \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{4}$

③ 第 6 試合目で 4 勝 2 敗か、2 勝 4 敗で決着 ${}_5C_3 \cdot \frac{1}{2^5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{5}{16}$

①、②、③より、第 6 試合までに決着がつく確率は、 $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$

第 7 試合までもつれ込む確率は、 $1 - \frac{11}{16} = \frac{5}{16} = 0.3125$ 約 31% (答)

<ついでに次の問題もよろしく>

「相撲の優勝決定戦—三人で争うと後の取組の力士は1/14の損」 (「IV-10」再掲)

問 A、B、C の 3 人のうち (3 人のくじ引きによって) A、B の 2 人が対戦し、その勝者と残る C が対戦する。以後、前の勝者と残っている 1 人が対戦し、これを続けて、2 連勝した者を優勝とする。A、B、C の優勝する確率を求めよ。

(答) A (または B) が優勝するのは、○:勝、×:負、として、

	1	2	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	6	7	8	
A(B)	○	○	○	×		○	○	○	×		○	×		○	○	...
B(A)	×		×		○	×		×		○	×		○	×		...
C		×		○	×		×		○	×		○	×		×	

または最初に負けて、

	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	7	
A(B)	×		○	○	×		○	×		○	○	...
B(A)	○	×		×	○	×		○	×		×	...
C		○	×			○	×		○	×		

$$P(A) = P(B) = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \dots\right) = \frac{2}{7} + \frac{1}{14} = \frac{5}{14}$$

C が優勝するのは、(負けると相手が連勝で、最初は負けられない)

	0	1	2	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	6	7	8	
A(B)	○	×		×		○	×		×		○	×		○	×		...
B(A)	×		×		○	×		×	○	×		○	×		○	×	...
C	...	○	○	○	×		○	○	○	×		○	×		○	○	

$$P(C) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \dots = \frac{2}{7} \quad \text{A、B より C の方が } \frac{1}{14} \text{ の損}$$