数学散歩　Ⅻ-1　　　　　　　　２０２０．５．　α　　岐阜市　村山錞司

―　気になった話題などから　―　　　　　　　　　　　　　　　NO 1

「数学する精神 加藤文元 中公新書 （市立図書館本館 BC 410 ｶ)」

「パスカルの三角形」について興味深い記事にお目にかかりました。適当に抜き書して紹介します。判読してください。なお、ネットで検索してもいろいろ出てきます。参考までに。

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜問題、解説など＞

第４章　コンピューターと人間

```
        1
      1   1
    1   2   1
  1   3   3   1
1   4   6   4   1
・・・・・
```

パスカルの三角形の性質「隣り合う二数の和は下の数に等しい」

$${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r \quad \text{（証明略）}$$

$$(1+x)^4 = (1+x)^3 \cdot (1+x) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$
$$\qquad + x + 3x^2 + 3x^3 + x^4$$
$$= 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

・・・・・

第６章　パスカルの半平面

〈失われた上半分〉

n\r	0	1	2	3	4	…
n=0	1	0	0	0	0	…
n=1	1	1	0	0	0	…
n=2	1	2	1	0	0	…
n=3	1	3	3	1	0	…

パスカルの三角形の左斜辺の 1 を縦に揃えると右半分に 0 が並ぶ。

$${}_3C_4 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0}{4!} = 0$$

（ $0 \leqq n < r$ のとき、 ${}_nC_r = 0$ ）

〈ﾗｲﾌﾟﾆｯﾂ記号〉

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(r-1))}{r!}$$

n＜r についても適用して

n\r	0	1	2	3	4	5	6	
			・・・					
n=−4	1	−4	10	−20	35	−56	84	・・・
n=−3	1	−3	6	−10	15	−21	28	・・・
n=−2	1	−2	3	−4	5	−6	7	・・・
n=−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	・・・
n= 0	1	0	0	0	0	0	0	・・・
n= 1	1	1	0	0	0	0	0	・・・
n= 2	1	2	1	0	0	0	0	・・・
n= 3	1	3	3	1	0	0	0	・・・
		・・・						

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$$

(例)

$$\binom{-3}{4} + \binom{-3}{5} = \binom{-2}{5}$$

$$\binom{-3}{4} = \frac{-3(-4)(-5)(-6)}{4!} = 15$$

$$\binom{-3}{5} = \frac{-3(-4)(-5)(-6)(-7)}{5!} = -21$$

$$\binom{-2}{5} = \frac{-2(-3)(-4)(-5)(-6)}{5!} = -6$$

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$$

$$(1+x)^{-2} = \frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \cdots$$

・・・・・・

第７章　ドッペルゲンガー（影法師）

〈ﾗｲﾌﾟﾆｯﾂ記号〉に分数を入れる。

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(r-1))}{r!} \quad \text{より} \quad \binom{1/2}{3} = \frac{(1/2)((1/2)-1)((1/2)-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{16}$$

:	:	:	:	:	:	:
n= −3/2	1	−3/2	15/8	−35/16	315/128	-693/256
n= −1/2	1	−1/2	3/8	−5/16	35/128	-63/256
n= 1/2	1	1/2	−1/8	1/16	-5/128	7/256
n= 3/2	1	3/2	3/8	−1/16	3/128	-3/256
n= 5/2	1	5/2	15/8	5/16	-5/128	3/256
:	:	:	:	:	:	:

〈半整数版パスカルの半平面〉

これは「パスカルの半平面」の「影」つまりドッペルベンガーである。

◎　各行の最初の数は 1 である。

◎　隣り合う２数の和は右下の数に等しい。

〈分数べきの展開〉

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \cdots$$

$\sqrt{2}$ の計算

x = 1 として、 $2^{1/2} = \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \frac{7}{256} - \cdots$

としたいが、（本によれば） これは「収束」という問題に関わる微妙な点であるから…

（参考：電卓で第 6 項の 7/256 までとすると、1.42578… ）

$x = -\frac{1}{2}$ を代入して $2\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} = \sqrt{2}$ を利用

$$2\left\{1 + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{16}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{5}{128}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{7}{256}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^5 - \cdots\right\} = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{16} - \frac{1}{64} - \frac{5}{1024} - \frac{7}{4096} - \cdots$$

（参考：電卓で第 6 項の 7/4096 までとすると、1.41528… ）

第８章 倒錯した数 ～ エピローグ

頭が倒錯して、省略しました。気になりましたら、直接、本に当ってください。

《 ＋ お ま け 》

「ふしぎな数学 ﾉｰﾛﾃｯﾌﾟ 松井政太郎訳 みすず書房」から （前回の「XI-2」の余白でも利用）

［ベルトランの箱の問題（パラドックス）］

「外観の同じ三つの箱がある。第１の箱には二つの金貨が入っており、第２の箱には２つの銀貨が入っており、第３の箱には金貨と銀貨が１つずつ入っている。今どれか１つの箱を取ったとき、その箱の中に異種の貨幣が入っている確率を求めよ。」・・・・・

・・・第３の箱を取ればよいからその確率は 1/3 。

（本の、次の議論として）

１つの箱を選び、入っている２つの貨幣のうち１つを取り除く。残っている貨幣は、取り除いた貨幣と同種か異種かのどちらかで、２つの可能性のうち、異種となる確率は 1/2 。

（何か変！！）箱の１つから１つの貨幣を取り除くことによって、確率が 1/3 から 1/2 になるという結論で何か変（？）です。

（私の勝手な解釈）

第１の箱を取り出す事象を A 、第２の箱は B 、第３の箱は C とし、金貨を取り出す事象を g 、銀貨を取り出す事象を s とする。

$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$ 。

$P(A\cap g) = P(B\cap s) = 1/3$ 、$P(C\cap g) = P(C\cap s) = 1/6$ 、$P(A\cap s) = P(B\cap g) = 0$ 。

$P_A(g) = P_B(s) = 1$ 、 $P_B(g) = P_A(s) = 0$ 、 $P_C(g) = P_C(s) = 1/2$ 、

$P(g) = P(A)\cdot P_A(g) + P(C)\cdot P_C(g) = (1/3)\cdot 1 + (1/3)\cdot(1/2) = 1/2$

$P(s) = P(B)\cdot P_B(s) + P(C)\cdot P_C(s) = (1/3)\cdot 1 + (1/3)\cdot(1/2) = 1/2$

$P_g(A) = P(A\cap g) / P(g) = (1/3) / (1/2) = 2/3$ 、$P_g(B) = 0$ 、

$P_g(C) = P(C\cap g) / P(g) = (1/6) / (1/2) = 1/3$

$P_s(A) = 0$ 、$P_s(B) = P(B\cap s) / P(s) = (1/3) / (1/2) = 2/3$

$P_s(C) = P(C\cap s) / P(s) = (1/6) / (1/2) = 1/3$

よって、取り出した貨幣と残っている貨幣が異種となるのは、

$P(g)\cdot P_g(C) + P(s)\cdot P_s(C) = (1/2)\cdot(1/3) + (1/2)\cdot(1/3) = 1/3\ (= P(C))$

（ネットで検索してもいろいろあります。ご感想、ご助言などお聞かせください。よろしく。）

「数学記号を読む辞典 瀬山士郎 技術評論社 410ｾ」から

（指数とカッコについて）

$3^{(3^3)} = 3^{27} = 7625597484987$ ですが、 $(3^3)^3 = 27^3 = 19683$

したがって、累乗の場合はカッコをはぶくことができないが約束として

$a^{b^c} = 3^{(b^c)}$ とするとのこと。

例として

$4^{(2^3)} = 4^8 = 65536$ $(4^2)^3 = 16^3 = 4096 = 4^6$

（私の勝手な解釈２）

金貨を g 、銀貨を s 、取り除く貨幣を前に、残っている貨幣を後に記し、事象を表わすとする。

金貨を取り除いても、さらに金貨が残っている確率は、$P(gg) = 1/3$　　（ $(1/3)\cdot 1 = 1/3$ ）

銀貨を取り除いても、さらに銀貨が残っている確率は、$P(ss) = 1/3$

金貨を取り除いて、銀貨が残っている確率は、$P(gs) = 1/6$　　（ $(1/3)\cdot(1/2) = 1/6$ ）

銀貨を取り除いて、金貨が残っている確率は、$P(sg) = 1/6$

（参考）　条件付き確率は、 $P(g)\ [= P(gg) + P(gs) = P(ss) + P(sg)] = P(s) = 1/2$ より、

$P_g(gg) = P(gg)/P(g) = (1/3)/(1/2) = 2/3$

$P_g(gs) = P(gs)/P(g) = (1/6)/(1/2) = 1/3$

$P_s(sg) = P(sg)/P(s) = (1/6)/(1/2) = 1/3$

$P_s(ss) = P(ss)/P(s) = (1/3)/(1/2) = 2/3$

よって、取り出した貨幣と残っている貨幣が異種となるのは、

$P(g)\cdot P_g(gs) + P(s)\cdot P_s(sg) = 1/3$