数学散歩　ＸⅢ-1　　　　　　　　　２０２０．７．　α　　岐阜市　村山錞司

一般の数学啓蒙書から---

「BLUE BACKS 大学入試問題で語る数論の世界 清水健一 講談社」 分館 BC412C (1/3)

書名と、はじめに の一文「・・・実際、数論の話題から数多くの問題が出題されています。・・・、そして未解決の話題も非常にたくさんあります。・・・」が目につき、入試と数論の絡みを眺めてみたくなりました。少し、数論の世界を散策します。なお、問題文の表現を変えたものもあります。ご了解ください。

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜最近、気になった用語＞「収束」と「終息」新聞記事でもｲﾛｲﾛ？？「づつ」と「ずつ」ﾈｯﾄで検索！

＜問題、略解、解説など＞

第１章　素数の魅力

＜コラッツの問題＞　センター試験から

n を 2 以上の自然数とし、
（ⅰ） n が偶数なら 2 で割る　（ⅱ） n が奇数なら 3 倍して 1 を加える
得られた自然数が 1 でなければ、この操作を繰り返す。たとえば 10→5→16→8→4→2→1　・・・
どのような自然数でも、必ず 1 になることが予想されていて未解決の問題です。・・・（以下略）

（「数学散歩」でも過去に「コラッツの予想」を扱ったことがあります。n = 7 としたら？）

＜素数が存在しない長い区間＞　連続するｎ個の自然数がすべて素数でない区間

(n+1)!+2、(n+1)!+3、・・・、(n+1)!+(n+1) (nが100億とすると、素数が全く存在しないのは？)

＜ｎとｎ！の間には必ず素数がある＞

(1997 京都教育大学) n を 3 以上の自然数とするとき次を証明せよ。
⑴ ｎ！－ １ の １ より大きい約数は ｎ より大きい。
⑵ ｎ ＜ ｐ ＜ ｎ！ を満たす素数 ｐ が存在する。

（略解）⑴　f(n) = n!−1 = n(n−1)(n−2)…3・2・1 − 1 より、f(n) は 2、3、…、n では割り切れないから、1 より大きい約数は n より大きい。

⑵ n ≧ 3 のとき、n ＜ n! − 1 ＜ n!
n! − 1 が素数であれば　p = n! −1 とすれば n ＜ p ＜ n!
n! − 1 が合成数であれば⑴より、n! − 1 の素因数の素数 p は n より大で、n! より小。

＜２次式の世界＞

(2006 京都大学) 2 以上の自然数 n に対し、n と $n^2 + 2$ がともに素数になるのは n = 3 に限ることを示せ。

（略証）　n = 2 のとき、$n^2 + 2 = 6 = 2×3$ (合成数)
n = 3 のとき、$n^2 + 2 = 11$ ともに素数
k ≧ 2 として
n = 3k − 2 ≧ 4 のとき、$n^2 + 2 = 3(3k^2 − 4k + 2) ≧ 18$ で、18 以上の 3 の倍数
n = 3k − 1 ≧ 5 のとき、$n^2 + 2 = 3(3k^2 − 2k + 1) ≧ 27$ で、27 以上の 3 の倍数
n = 3k ≧ 6 のとき、n は 6 以上の 3 の倍数で合成数
以上より、ともに素数となるのは n = 3 のときに限る。

(2006 明治学院大学) $n^2 − 20n + 91$ の値が素数となる整数 n を求めよ。

（略解）　$n^2 − 20n + 91 = (n − 7)(n − 13)$ が素数より、n − 7 = ±1 、n − 13 = ±1
として、n = 8、6、14、12　　n = 8 のとき −5、n = 6 のとき 7、
n = 14 のとき 7、n = 12 のとき −5
よって、 n = 6 と 14 (答)
(本では「ここでは − p も素数である…」として 8 と 14 を答としている。)

第２章　完全数・メルセンヌ数・フェルマー数

＜完全数＞　自分自身以外の約数の和が、自分自身に等しくなる正整数のこと

(2005 佐賀大学) 2 以上の自然数 n に対し、n 以外の n の正の約数の和を S(n) とする。
⑴ S(28) および S(120) を求めよ。
⑵ $n = 2^{m-1}(2^m − 1)$　(m = 2、3、4、・・・) とする。
(ｲ) $n = 2^m − 1$ が素数のときの S(n) を求めよ。
(ﾛ) $n = 2^m − 1$ が素数でないとき、 S(n)＞ n であることを証明せよ。

（略解）⑴　$S(28) = 1+2+4+7+14 = 28$ 、$S(120) = 1+2+4+8+3+6+12+24+5+10+20+40+15+30+60 = 240$

⑵　(ｲ)　$2^m - 1$ が素数だから、　$n = 2^{m-1}(2^m - 1)$ の約数の和は n を除いて、

$S(n) = 1+2+\cdots+2^{m-1} \quad +1\cdot(2^m-1) \quad +2\cdot(2^m-1) \quad + \cdots \quad +2^{m-2}\cdot(2^m-1)$

$= 2^m-1 + (1+2+\cdots+2^{m-2}))(2^m-1) = 2^{m-1}(2^m-1) = n$　（完全数）

(ﾛ)　$2^m - 1$ が素数でないとすると、合成数となり、約数は(ｲ)の場合より多くなる。

したがって、$S(n) > n$

＜過剰数、不足数＞　その数自身を除いた和に対して

過剰数　12 ： $1+2+3+4+6 = 16 > 12$ 、20 ： $1+2+4+5+10 = 22 > 20$ 、・・・

不足数　4 ： $1+2 = 3 < 4$ 、8 ： $1+2+4 = 7 < 8$ 、・・・

＜メルセンヌ数・フェルマー数＞

メルセンヌ数：$2^n - 1$ の形の数。素数のとき、メルセンヌ素数

フェルマー数：$F_n = 2^{2^n} + 1$ の形の数。　素数のとき、メルセンヌ素数

(2007 千葉大学)　a、b は 2 以上の整数とする。このとき、次を証明せよ。

⑴　$a^b - 1$ が素数ならば、$a = 2$ であり、b は素数である。

⑵　$a^b + 1$ が素数ならば、$b = 2^c$（c は整数）と表せる。

（略証）⑴　$a^b - 1 = (a - 1)(a^{b-1} + a^{b-2} + \cdots + a + 1)$ だから $a - 1 = 1$ より　$a = 2$

また、b が素数でないとすると、$b = pq$（p、q は 2 以上の正整数）とでき、

$2^{pq} - 1 = (2^p - 1)(2^{p(q-1)} + 2^{p(q-2)} + \cdots + 2^p + 1)$　は素数にならない。

⑵　$b = 2^c$ とできないとすると、b は 3 以上の奇数の因数 k をもち、　$b = k\cdot 2^c$ とできる。

$a^{2^c} = d$　とおくと、　$a^b + 1 = d^k + 1 = (d + 1)(d^{k-1} - d^{k-2} + \cdots - d + 1)$

後の（　　）= 1 とすると、　$d^k + 1 = d + 1$　　$k \geqq 3$ に反する。

よって、　$b = 2^c$　となる。

第３章　ピタゴラスの定理から眺める世界

$a^2 + b^2 = c^2$ を満たす正整数（a、b、c）の値の組をピタゴラス数という。

(2000 滋賀大学)　次を証明せよ。

⑴　n を自然数とするとき、n^2 は 3 の倍数かまたは 3 で割った余りが 1 である。

⑵　自然数 a、b、c が $a^2 + b^2 = c^2$ を満たすとき、a、b の少なくとも 1 つは 3 の倍数である。

（略証）⑴　3 の倍数でないとすると、3 で割った余りは 1 か 2 。$n = 3k + 1$ か $n = 3k + 2$

$n = 3k + 1$ のとき、　$(3k + 1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$

$n = 3k + 2$ のとき、　$(3k + 2)^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$　　ともに 3 で割った余りは 1

⑵　a、b がともに 3 の倍数でないとすると⑴より、　$a^2 + b^2$ を 3 で割った余りは 2

c^2 を 3 で割った余りは、0 か 1 で矛盾。どちらかは 3 の倍数になる。

(2001 千葉大学)　次を証明せよ。

⑴　n を自然数とするとき、n^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である。

⑵　3 つの自然数 a、b、c が $a^2 + b^2 = c^2$ を満たすとき、a、b の少なくとも一方は偶数である。

（略証）⑴　n は偶数か奇数、$n = 2k$ 、$n = 2k-1$

$n = 2k$ のとき　$n^2 = 4k^2$ 、　$n = 2k-1$ のとき $n^2 = 4(k^2-k)+1$、4で割った余りは0か1

⑵　a、b がともに奇数とすると、$a = 2k-1$、$b = 2h-1$

$a^2 + b^2 = 4(k^2+h^2-k-h)+2$ 、4 で割った余りは 2

c^2 を 4 で割った余りは、0 か 1 で矛盾。どちらかは 偶数になる。

(2004 旭川医科大学)　a、b、c はどの 2 つも共通な約数をもたない正整数とする。

a、b、c が $a^2 + b^2 = c^2$ を満たしているとき、次のことを示せ。

⑴　c は奇数である。　⑵　a、b の 1 つは 3 の倍数である。

⑶　a、b の 1 つは 4 の倍数である。

（⑴、⑵は証明略）⑶（略証）　a を偶数、b、c を奇数とする。$b = 2h-1$、$c = 2k-1$ とおくと、

$a^2 = c^2-b^2 = 4k(k-1) - 4h(h-1)$ 、$k(k-1)$、$h(h-1)$ はともに連続 2 整数の積だから a^2 は 8 の倍数、a が偶数で 4 の倍数でないとすると $a = 4m-2$ 、$a^2 = 4(4m^2-4m+1)$ で（　）内は奇数だから a^2 は 8 の倍数にならない。よって、a は 4 の倍数になる。