数学散歩　ＸⅢ-2　　　　　　　　２０２０．７．　β　　岐阜市　村山錞司

一般の数学啓蒙書から---

「BLUE BACKS 大学入試問題で語る数論の世界 清水健一 講談社」 分館 BC412C (2/3)

ご感想やご意見、間違いのご指摘などあれば、お聞かせください。

＜気になる文字：「ぢ」、「ヂ」の文字変換はどうやってするのだろう？＞

＜問題、略解、解説など＞

第３章　ピタゴラスの定理から眺める世界

＜ピタゴラス数は無数にあるか＞

単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 T(-1,0) を通り傾き n/m の直線と単位円との交点 P の座標を求めよ。

（略解）・・・・・・交点は　$P((m^2-n^2)/(m^2+n^2),\ 2mn/(m^2+n^2))$

P は円周上の点だから、　$\{(m^2-n^2)/(m^2+n^2)\}^2 + \{2mn/(m^2+n^2)\}^2 = 1$

分母を払って、　$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$

よってピタゴラス数 $(m^2 - n^2,\ 2mn,\ m^2 + n^2)$ が得られた。

m、n の一方は偶数で他方が奇数で　互いに素であれば既約なピタゴラス数になる。

（解釈）　m、n は偶数と奇数だから、　$m^2 \pm n^2$ は奇数になり、2 は 3 つの数の公約数ではない。
p を 2mn の 2 以外の素因数とすると、互いに素である m と n のどちらか一方の素因数になり、
$m^2 \pm n^2$ は p で割り切れない。よって 3 数共通の約数はなく、既約となる。

既約なピタゴラス数の直角三角形は無数にある。

＜「ぢ」、「ヂ」の文字変換：ﾊﾟｿｺﾝの画面の右下にある「あ」または「A」を右ｸﾘｯｸしてIME…＞

(1999 名城大学) 連続する 4 つの自然数 x、y、z、w が $x^3 + y^3 + z^3 = w^3$ を満たすとき、x、y、z、w を求めよ。ただし、$x < y < z < w$ とする。

（略解）　$y = x+1$、 $z = x+2$、 $w = x+3$　とおくと、

$x^3 + (x^3+3x^2+3x+1) + (x^3+6x^2+12x+8) = x^3+9x^2+27x+27$

$2x^3 - 12x - 18 = 0 \quad \therefore \quad x^3 - 6x - 9 = (x - 3)\cdot(x^2 + 3x + 3) = 0$

x は自然数だから、x = 3 、y = 4 、z = 5 、w = 6

第４章　黄金比とﾌｨﾎﾞﾅｯﾁ数列

(1994 関西医科大学)

数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 1$ 、 $a_2 = 1$ 、 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ （ $n \geqq 1$ ）で定義されている。

⑴　a_{10} 、a_{16} を求めよ。

⑵　$a_{n+2} - p\,a_{n+1} = q\,(a_{n+1} - p\,a_n)$ を満たす実数 p、q を求めよ。

⑶　一般項 a_n を求めよ。

⑷　初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

＜参考 フィボナッチ数列＞ $a_1 = 1$ 、 $a_2 = 1$ 、 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ （ $n \geqq 1$ ）について

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	・・・
a_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	・・・
s_n	1	2	4	7	12	20	33	54	88	143	・・・
a_n^2	1	1	4	9	25	64	169	441	1156	3025	・・・
Σa_n^2	1	2	6	15	40	104	273	714	1870	4895	・・・

（略解）⑴　$a_{10} = 55$ 、$a_{16} = 987$

⑵　漸化式を変形して、　$a_{n+2} = (p+q)a_{n+1} - pq\,a_n$ 、 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ と係数を比較して、

$p+q = 1$、$pq = -1$　　$t^2 - t - 1 = 0$　　$t = (1 \pm \sqrt{5}) / 2$

$$(p,q) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)、\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

⑶　$a_{n+1} - p\,a_n = q\,(a_n - p\,a_{n-1}) = q^{n-1}(a_2 - p\,a_1) = q^{n-1}(1 - p)$
$= q^n$　（ $p + q = 1$ より $1 - p = q$ ）

同様に　$a_{n+1} - q\,a_n = p^n$　$\therefore$　$(p - q)a_n = p^n - q^n$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

＜⑷ の前に、フィボナッチ数列の和について＞

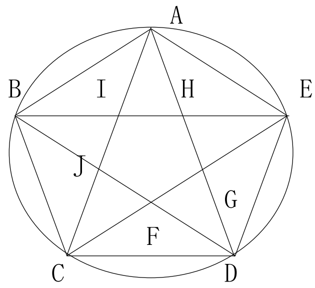
$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_{n+2} - 1$

（証明略）　数学的帰納法で証明できる。また、２つの等比数列の和として求めてもよい。

⑷の解　$s_n = a_{n+2}-1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} \right\} - 1$

(2007 福島大学)　(同じフィボナッチ数列で)　自然数 n ($n \geqq 2$) に対して、
$a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + \cdots + a_n^{\,2} = a_n \cdot a_{n+1}$　が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明しなさい。

（証明略）



＜黄金比（黄金分割）と正五角形＞
フィボナッチ数列は他にも長方形や名刺の用紙などと関係あり。

(2010 北里大学)
円に内接する一辺の長さが 1 の正五角形 ABCDE がある。
点 F、G、H、I、J は対角線の交点である。
⑴　△ABE と△IBA は相似であることを示せ。
また、EA = EI を示せ。
⑵　BE と BI の長さを求めよ。⑶　(略)

（略解）⑴　(略)、EA = AB = EI = 1 、
⑵　$AB^2 = BI \cdot BE$ を利用。　BE = x とすると、BI = x−1 より、1 = x(x−1)
∴　$BE = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 、 $BI = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

＜参考 ＞フィボナッチ数列 $a_1 = 1$ 、 $\underline{a_2 = 1}$ 、 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ($n \geqq 1$)
リュカ数列　$a_1 = 1$ 、 $\underline{a_2 = 3}$ 、 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ($n \geqq 1$)

(2003 愛知教育大学)　２次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の相異なる解を α、β とし、
$a_n = \alpha^n + \beta^n$ (n = 1、2、3、…)と定義する。
⑴　a_1、a_2、a_3、a_4 を求めよ。
⑵　$n \geqq 3$ のとき、a_n を a_{n-1} と a_{n-2} を用いて表せ。

（略解）⑴　解と係数の関係より、$\alpha+\beta = 1$、$\alpha\beta = -1$
$a_1 = \alpha+\beta = 1$、 $a_2 = \alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 3$ 、
$a_3 = \alpha^3+\beta^3 =$ (略) $= 4$ 、 $a_4 = \alpha^4+\beta^4 =$ (略) $= 7$ 、
⑵　$a_n = \alpha^n+\beta^n = (\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})(\alpha+\beta) - \alpha\beta(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2}) = a_{n-1} + a_{n-2}$

第５章　パスカルの三角形からの展開（本では多角数、分割数などいろいろ展開していますが。）

(2002 大阪教育大学)　自然数 n をそれより小さい自然数の和として表すことを考える。ただし、1+2+1 と 1+1+2 のように和の順序が異なるものは別の表し方とする。例えば、自然数 2 は 1+1 の１通りの表し方ができ、自然数 3 は、2+1、1+2、1+1+1 の３通りの表し方ができる。
⑴　自然数 4 の表し方は何通りあるか。　⑵　自然数 5 の表し方は何通りあるか。
⑶　2 以上の自然数 n の表し方は何取りあるか。

（略解）⑴　4 = (3+1, 2+2, 1+3)、(2+1+1, 1+2+1, 1+1+2)、(1+1+1+1) の 7 (通り)
(重複組合せ ${}_nH_r$ を参考に)　4 つの ○＿○＿○＿○の間の 3 個のスペース＿に + を入れていくつかのグループに分割する。　○○○+○、○○+○○、・・・、○+○+○+○ と考えれば、
${}_3C_1 + {}_3C_2 + {}_3C_3 = 3+3+1 = 7$ (通り)　⑵　${}_4C_1 + 4C_2 + 4C_3 + {}_4C_4 = 15$ (通り)
⑵　n 個の○の n−1 個の間に「+」を幾つか入れて 2 つ以上のグループに分割すると、
${}_{n-1}C_1 + {}_{n-1}C_2 + \cdots + {}_{n-1}C_{n-1} = ({}_{n-1}C_0 + {}_{n-1}C_1 + \cdots + {}_{n-1}C_{n-1}) - {}_{n-1}C_0$
$= 2^{n-1} - 1$ (通り)

(2003 名古屋大学)　n を自然数とするとき $m \leqq n$ で m と n の最大公約数が 1 となる自然数 m の個数を f(n) とする。
⑴　f(15) を求めよ。　⑵　p、q を互いに異なる素数とする。f(pq) を求めよ。

（答）⑴　1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14 から f(15) = 8
⑵　1 から pq−1 までの pq−1 個から
p の倍数 p, 2p, …, (q−1)p の q−1 個と q の倍数 p−1 個
を引いて　f(pq) = (pq−1)−(q−1)−(p−1) = (p−1)(q−1)

(2008 名古屋市立大学)　n を正の整数とする。次の等式を証明せよ。
$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$ の x^n の係数を比較することにより、　$\Sigma_{k=0}^{n} ({}_nC_k)^2 = {}_{2n}C_n$

（略証）　${}_{2n}C_n = \Sigma_{k=0}^{n}\, {}_nC_k \cdot {}_nC_{n-k} = \Sigma_{k=0}^{n} ({}_nC_k)^2$